Vertreibung der Gespenster

Das Arbeiten mit infinitesimalen Größen ist stets von Widersprüchen bedroht. Leibniz hat diese auf so elegante Weise bewältigt, wie es seinen Fachkollegen erst mehr als 150 Jahre später gelang.

Von Thomas Sonar

Gottfried Wilhelm Leibniz hat die Determinantentheorie begründet, auf dem Gebiet der Versicherungsmathematik gearbeitet und die Binärarithmetik erfunden. Seine wohl größte mathematische Leistung war jedoch die Begründung der Differenzial- und Integralrechnung, der Analysis, die er unabhängig von Isaac Newton erschuf.

Für Leibniz selbst war allerdings die Analysis eine Anwendung der »Kombinatorik«, worunter er nicht nur in der heutigen engen Bedeutung des Wortes die Beschäftigung mit diskreten Strukturen verstand, sondern viel allgemeiner Regeln zum Umgang mit neu geschaffenen Zeichen, um methodisch neues Wissen zu generieren. Die Suche nach solchen Regeln und Zeichen durchzieht sein gesamtes mathematisches Werk.

Als der 26-jährige Leibniz als Diplomat in kurmainzischen Diensten in Paris weilt, begegnet er 1672 einem der führenden Mathematiker und Physiker seiner Zeit, dem Niederländer Christiaan Huygens (1629–1695). Der stellt ihm als Herausforderung eine Aufgabe, aus der am Ende Leibnizens Analysis heranwächst; so erzählt er selbst es in seiner Schrift »Historia et origo calculi differentialis« (»Geschichte und Ursprung der Differenzialrechnung«) aus dem Jahr 1714. Es ist die Summe der unendlichen Reihe

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots$$

zu bestimmen. Die Antwort ist 2; Huygens hat sie vor Kurzem gefunden, und Leibniz hat ihm von seinen theoretischen Untersuchungen zu speziellen Reihen berichtet. Welch besserer Test für Leibnizens Fähigkeiten bietet sich an?

Leibniz geht die Herausforderung mit einem Mittel an, mit dem er sich schon vorher vertraut gemacht hat: Differenzenreihen. Ist eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ von n Zahlen gegeben, dann sind die Differenzen definiert durch

$$d_1=a_1-a_2,\ d_2=a_2-a_3,\ \ldots,\ d_{n-1}=a_{n-1}-a_n.$$

Summiert man diese Differenzen, dann erhält man das Ergebnis

$$d_1+d_2+d_3+\ldots+d_n=a_1-a_2+a_2-a_3+a_3-a_4+\ldots+a_{n-1}-a_n=a_1-a_n.$$

Von der gesamten Summe der Differenzen bleibt also lediglich die Differenz von erstem und letztem Glied der Ausgangsfolge übrig. Im modernen Sprachgebrauch bezeichnet man solche Summen auch als »Teleskopsummen«, weil sie zusammenschnurren wie ein Taschenteleskop aus vielen kurzen, ineinander steckenden Rohren oder eine Radioantenne. Ist $a_n=0$, dann bleibt von der ganzen langen Differenzensumme sogar nur a_1 übrig. Diesen Umstand macht sich Leibniz zu Nutze. Das Folgenglied $2/(n(n+1))$ aus Huygens' Aufgabe lässt sich nämlich als $2/n-2/(n+1)$ schreiben, wie man sieht, indem man die beiden Brüche auf den Hauptnenner bringt. Und schon hat man eine Teleskopsumme, von der nur das erste Glied 2 übrig bleibt.

Leibniz verallgemeinert diesen Fund auf der Stelle. Analog dem pascalschen Dreieck, in dem jeder Eintrag die Summe

AUF EINEN BLICK

INFINITESIMALRECHNUNG

1 Leibniz hat die **Differenzial- und Integralrechnung**, das Herzstück der modernen Mathematik, unabhängig von Isaac Newton auf der Grundlage der **Indivisiblenrechnung** entwickelt.

2 Die heute gebräuchlichen Zeichen für **Differenzialquotienten** und **Integrale** stammen von Leibniz.

3 Schon 1676 beschrieb er das wesentliche Mittel, mit dem die moderne Mathematik den drohenden Widersprüchen der Infinitesimalen aus dem Wege geht: die **Epsilontik**. Aber das Manuskript ging verloren und wurde erst 1993 veröffentlicht.

der beiden Zahlen in der Zeile darüber ist, stellt er ein »harmonisches Dreieck« auf, in dem die erste Zeile aus den Stammbrüchen 1/1, 1/2, 1/3, ... besteht und jede Zahl in den folgenden Zeilen gleich der Differenz der über ihr stehenden Zahlen ist.

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \dots \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \dots & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \dots & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & \dots & & & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & \dots & & & & \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{42} & \dots & & & & & \\
\frac{1}{7} & \dots & & & & & &
\end{array}$$

Die Differenz der ersten beiden Einträge der ersten Zeile, 1–1/2, ergibt das erste Element der zweiten Zeile, die nächste Differenz der ersten Zeile, 1/2–1/3=1/6, gibt das zweite Element der zweiten Zeile und so weiter. Ist eine Folge a_1, a_2, a_3, ..., eine Nullfolge, werden also alle Folgenglieder immer kleiner und nähern sich schließlich der Null (und das gilt für alle Folgen im harmonischen Dreieck), dann gilt für die Differenzenfolge $d_1=a_1-a_2$, $d_2=a_2-a_3$, ... wie im endlichen Fall, dass die Summe $d_1+d_2+d_3+...= a_1-a_2+a_2-a_3+a_3-a_4 ... = a_1$ ergibt. Mit Hilfe dieser Beobachtung hat Leibniz nun auf einen Schlag unendlich viele Reihen summiert, denn für die zweite Zeile im harmonischen Dreieck folgt

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots=1,$$

für die dritte

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\ldots=\frac{1}{2},$$

für die vierte

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\ldots=\frac{1}{3}$$

und so weiter. Die Lösung von Huygens' Aufgabe ergibt sich, indem man die Summe der zweiten Zeile mit 2 multipliert. Differenzen und Summen werden später für Leibnizens Analysis bestimmend sein; seine spätere Bezeichnung dx markiert eine (sehr kleine) Differenz in x, und das Zeichen $\int$ für das Integral meint das »S« im Wort Summe.

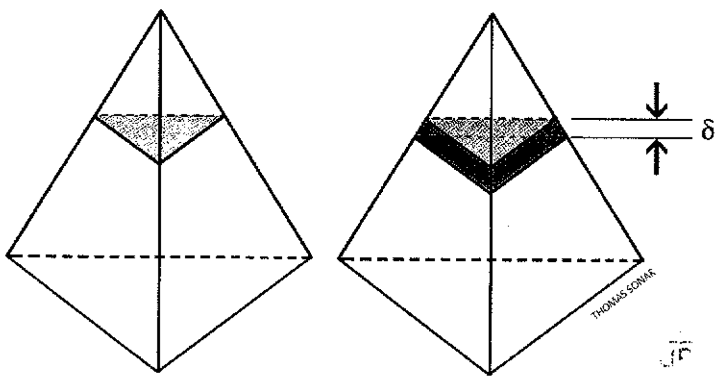
Während seiner ersten Londonreise im Jahr 1672 berichtet Leibniz auf einer Party im Hause Robert Boyles dem Mathematiker John Pell stolz über seine Erfolge mit Differenzen. Pell weist Leibniz darauf hin, dass dessen Ergebnisse längst bekannt und in Büchern publiziert sind – eine herbe Niederlage für den jungen Mann, die ihn in England schon früh als Plagiator erscheinen lässt. Unglücklicherweise werden schon hier die Grundlagen der späteren bitteren Auseinandersetzung gelegt, in der Leibniz und Newton einander die Priorität bei der Entdeckung der Analysis streitig machen – ein Streit, der auf Jahrhunderte das wissenschaftliche Klima zwischen England und dem Kontinent vergiftet.

Vorstufe: Indivisible

Zurück in Paris beginnt Leibniz, von Huygens angeregt, ein Literaturstudium: Einerseits liest er die Werke der Indivisiblenmathematiker. Indivisible sind geometrische Größen, die in einer Richtung keine Ausdehnung haben, aus denen aber dennoch Flächen und Körper aufgebaut werden sollen. In einer Dimension sind die Indivisiblen Punkte, in zwei Dimensionen sind es gerade Linien und in drei Dimensionen Flächenstücke. Schon Archimedes hatte Flächen und Körper als aus Indivisiblen aufgebaut betrachtet und diese sogar auf einer gedachten Balkenwaage gegeneinander abgewogen. Das schien ihm selbst allerdings wohl so verrückt, dass er die gefundenen Resultate dann im Nachhinein durch klassische geometrische Überlegungen bewies.

In der Renaissance trieben Männer wie Bonaventura Cavalieri (1598–1647) und Evangelista Torricelli (1608–1647) die Indivisiblenrechnung zu ihrer großen Blüte, in der wir heute einen Vorläufer der Integralrechnung erkennen. Cavalieri schrieb für »Summen« von Indivisiblen, die eigentlich gar keine sind, vorsichtig »omnes lineae« für die »Gesamtheit aller Linien«. Und das Volumen eines Tetraeders hätte er als eine unendliche »Summe« aus unendlich dünnen Scheibchen berechnet (siehe Bild unten »Indivisible und Infinitesimale im Vergleich«). Allerdings war Vorsicht geboten: Diese Technik konnte bei ungeschickter Anwendung leicht zu Widersprüchen führen. Beispiele dafür wurden schon zu Lebzeiten Cavalieris und seiner Mitstreiter entdeckt, und die Jesuiten verwarfen die ganze Methode wegen ihrer Inkonsistenz (Spektrum der Wissenschaft 10/2015, S. 64).

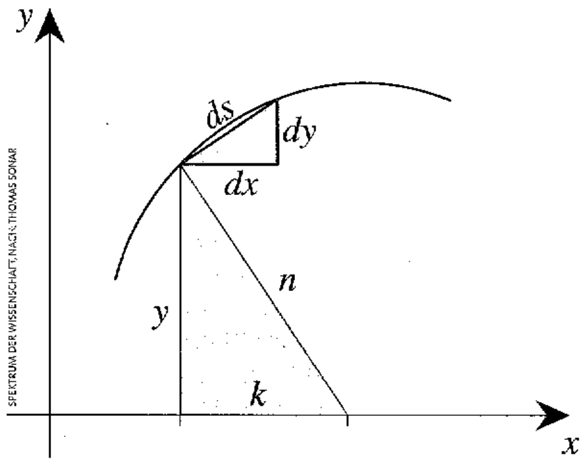
Indivisible und Infinitesimale im Vergleich



Für einen Indivisiblenmathematiker wird das Volumen eines Körpers (hier eines Tetraeders) aus unendlich vielen Dreiecken der Dicke null gebildet (links). Ein Infinitesimalmathematiker betrachtet den Körper dagegen als aus dünnen Scheiben der variablen Dicke $\delta > 0$ aufgebaut (rechts).

Das charakteristische Dreieck

Eine Sekante *ds* an den Graphen einer Funktion zusammen mit den zugehörigen Abschnitten dx in x- und dy in y-Richtung bilden zusammen ein Dreieck, das Leibniz »charakteristisches Dreieck« nennt. Die Größen ds, dx und dy stellt er sich als sehr klein (»infinitesimal«) vor. Man zeichne die Senkrechte n an die Sekante (eigentlich an die Funktion, was aber fast dasselbe ist) und nenne die mit k bezeichnete Strecke auf der x-Achse die Subnormale. Das charakteristische Dreieck und das Dreieck aus y, k und n sind geometrisch ähnliche Dreiecke. Über die Verhältnisse an dem großen Dreieck kann Leibniz also die Verhältnisse an dem infinitesimal kleinen charakteristischen Dreieck verstehen. So folgt aus der Ähnlichkeit für die Seitenverhältnisse



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH: THOMAS SONAR

$$\frac{k}{y} = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{y}{n} = \frac{dx}{ds},$$

wofür Leibniz später

$$\int k\,dx = \int y\,dy; \quad \int y\,ds = \int n\,dx$$

schreiben wird.

Auch Leibniz beginnt als Indivisiblenmathematiker. Um aber den notorischen Widersprüchen aus dem Weg zu gehen, nimmt er nicht unendlich dünne Scheibchen, sondern solche mit kleiner, aber endlicher (»infinitesimaler«) Dicke, die obendrein auch variabel ist.

Wie berechnet man die Steigung der Tangente?

Andererseits liest Leibniz den »Traité des sinus du quart de cercle« (»Abhandlung über die Ordinaten im Viertelkreis«) von Blaise Pascal (1623–1662). In dieser Arbeit argumentiert Pascal mit einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse die Tangente an einen Punkt des Viertelkreises ist. Mit Hilfe dieses Dreiecks leitet er Aussagen über die Oberfläche einer Halbkugel her. Leibniz erkennt, dass ein solches Dreieck nicht nur beim Viertelkreis funktionieren würde. In seinem Rückblick schreibt er (von sich selbst in der dritten Person sprechend): »Nun aber ging ihm von einem einzigen gewissen Beispiel des Dettonville her plötzlich ein Licht auf, das selbst Pascal (was verwundern mag) von dort her nicht erblickt hatte.« Amos Dettonville ist ein Anagramm auf das Pseudonym Louis de Montalte, das Pascal verwendete. Das »Licht«, das Leibniz aufging, führte zu einem Dreieck, wie es noch heute im Schulunterricht zur Herleitung der Ableitung dient (siehe »Das charakteristische Dreieck«, oben).

Die Idee vom »charakteristischen Dreieck«, wie Leibniz es nennt, trägt reiche Früchte. Der junge Mathematiker baut auch Flächen unter Kurven aus infinitesimalen Dreiecken auf – was er später zur Integralrechnung ausbauen wird – und findet den »Transmutationssatz«, in dem wir heute eine Form der partiellen Integration erkennen. Dann folgen die Entdeckungen Schlag auf Schlag. Leibniz macht sich mit seinen infinitesimalen Techniken an die »Quadratur des Kreises«, die Aufgabe, zu einem gegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Die Griechen der Antike verstanden unter »konstruieren« den Gebrauch eines Lineals (ohne Längenskala) und eines Zirkels (ohne Winkelskala) und scheiterten an der Aufgabe – unvermeidlich, denn sie ist mit diesen Mitteln unlösbar.

Leibniz verwendet sein Transmutationstheorem und Techniken aus der »Logarithmotechnica« des Mathematikers und Astronomen Nikolaus Mercator (um 1620–1687), insbesondere dessen Reihendarstellung für den natürlichen Logarithmus, um schließlich im Jahr 1673 die berühmte unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots$$

für die Kreiszahl π zu finden. Damit hat er zwar π nicht durch eine endliche Formel ausgedrückt – das wäre einer Lösung des antiken Problems gleichgekommen –, aber er kann die Kreiszahl und damit die Kreisfläche beliebig genau berechnen: die »arithmetische Quadratur des Kreises«. Er ist von seinem Fund so begeistert, dass er bei der Publikation des Ergebnisses im Jahr 1682 ein Zitat aus Vergils 8. Ekloge hinzufügt: »Gott freut sich der ungeraden Zahl.«

Ende des Jahres 1675, Leibniz ist noch immer in Paris, wird seine Analysis zum Kalkül. In einem Manuskript vom 29. Oktober schreibt er noch die schwer lesbare Formel

$$\frac{\overline{\text{omn.}\ell}^{2}}{2} = \text{omn.}\,\overline{\overline{\text{omn.}\ell}\,\frac{\ell}{a}},$$

wobei »omn.« für das lateinsche »omnes« (alle), also die Gesamtheit der cavalierischen Indivisblen steht. Der Überstrich bedeutet eine Klammerung der darunterstehenden Terme, ℓ ist das spätere dy, und a=dx, was aber auf a=1 gesetzt wird. Wir würden diese Formel heute in der Form

$$\frac{1}{2}\left(\int dy\right)^2 = \int\left(\int dy\right) dy$$

lesen. Tatsächlich erscheint in diesem Manuskript zum ersten Mal das Integralzeichen, und Leibniz schreibt: »Es wird nützlich sein, $\int$ an Stelle von omn. zu schreiben, so dass $\int \ell$ = omn. ℓ, oder die Summe der ℓ.« Schon drei Tage später, in einem anderen Manuskript, schreibt Leibniz *dx* und gewinnt die ersten Rechenregeln für den Umgang mit seinem Differenzenoperator *d*, zum Beispiel

$$d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2 = 2xdx,$$

weil Leibniz das Quadrat der infinitesimal kleinen Größe *dx* gleich null setzt – das Quadrat ist »von höherer Ordnung klein«. In einem Manuskript vom 11. Juli 1677 sind Leibniz dann die Produkt- und die Quotientenregel klar:

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = \\ x\,dy + y\,dx + dx\,dy = x\,dy + y\,dx,$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y+dy}{x+dx} - \frac{y}{x} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + x\,dx} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}.$$

In der letzten Gleichung hat Leibniz den Term $x\,dx$ im Nenner, der eigentlich nicht von höherer Ordnung klein ist, vernachlässigt, und zwar mit der Begründung, dass er im Vergleich zu x^2 vernachlässigbar klein ist. In einer überarbeiteten Version dieses Manuskripts finden wir dann auch den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Damit steht nun ein mächtiger Kalkül zur Verfügung.

Verschwundenes Manuskript

Am Sonntag, den 4. Oktober 1676, bricht Leibniz aus Paris auf. Sein bisheriger Dienstherr in Mainz ist verstorben, und es liegt seit einiger Zeit ein Angebot des Herzogs Johann Friedrich von Braunschweig-Lüneburg und Calenberg vor, der in Hannover residiert. Leibniz soll als Hofbibliothekar und -historiograf nach Hannover kommen, aber den 30-jährigen Leibniz zieht es eigentlich in Metropolen wie London und Paris. So reist er von Paris zunächst nach London und Amsterdam, aber es ergibt sich kein weiteres Angebot einer Anstellung, und er muss wohl oder übel nach Hannover weiterreisen.

Noch in Paris hat Leibniz ein sehr umfangreiches Manuskript abgeschlossen: »De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis« (»Über die arithmetische Quadratur des Kreises, der Ellipse und der Hyperbel, von der ein Korollar die Trigonometrie ohne Tafeln ist«). Das Werk enthält die arithmetische Kreisquadratur, die Verwendung des charakteristischen Dreiecks, Reihenentwicklungen der Winkelfunktionen (daher die »Trigonometrie ohne Tabellen«) und den Transmutationssatz. Leibniz hat seinen Freund, den Abbé Soudry, beauftragt, das Manuskript in Paris drucken zu lassen. Der stirbt jedoch 1678; das Manuskript wandert durch verschiedene Hände und geht am Ende auf dem Postweg nach Hannover verloren.

Es gab aber noch verschiedene weitere Entwürfe. Den ältesten hat Leibniz offenbar selbst aufbewahrt; jedenfalls befand er sich in seinem Nachlass und lag lange unbeachtet in der Bibliothek in Hannover. Nach einem Teildruck von 1934 ist es erst 1993 Eberhard Knobloch gelungen, die Geschichte dieses Manuskripts zu rekonstruieren und es vollständig zu transkribieren.

Die große Überraschung in diesem Text bietet der Satz 6, in dem Leibniz die Flächenberechnung (Integration) unter einer Kurve erklärt. Leibniz ist sich bewusst, dass der Inhalt des Satzes die Zeitgenossen zu überfordern droht; denn er stellt ihm folgende Warnung voran: »Die Lektüre dieses Satzes kann ausgelassen werden, wenn man bei dem zu beweisenden Satz 7 keine größte Strenge verlangt. Und es wird besser sein, dass er zunächst übergangen und dann erst gelesen wird, wenn die ganze Sache verstanden worden ist, damit seine Übergenauigkeit den vorzeitig ermüdeten Geist nicht von

Was ist eine reelle Zahl?

Die rationalen Zahlen bilden einen Körper, das heißt eine Menge, in der man uneingeschränkt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann (mit der einzigen Ausnahme der Division durch null). Aber sie sind »unvollständig«; zum Beispiel kann man die Länge der Diagonale in einem Quadrat der Seitenlänge 1 nicht durch eine rationale Zahl ausdrücken.

Um eine solche »irrationale Zahl« (im Beispiel die Wurzel aus 2) korrekt zu erfassen, findet man eine Folge rationaler Zahlen, welche gegen diese Zahl konvergiert, und definiert die neue Zahl als deren Grenzwert. Den gibt es in den rationalen Zahlen aber nicht; damit diese Definition nicht in der Luft hängt, muss man ein Kriterium für die Konvergenz einer Folge finden, das ohne den Grenzwertbegriff auskommt. Das ist das nach dem fanzösischen Mathematiker Augustin Cauchy (1789–1857) benannte Kriterium: Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$ heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Nummer n gibt mit der Eigenschaft, dass alle Folgenglieder ab dieser Nummer voneinander einen Abstand kleiner als ε haben. Die Glieder einer Cauchy-Folge kommen einander also immer näher; da bleibt ihnen gewissermaßen nichts übrig, als gegen einen Punkt zu streben, auch wenn es den unter den rationalen Zahlen nicht gibt. Außerdem kann man die Aussage treffen, dass zwei Cauchy-Folgen »äquivalent sind«, das heißt gegen denselben Grenzwert streben, ohne explizit von diesem Grenzwert zu sprechen.

Nach Georg Cantor (1845–1918) definiert man daher die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Es stellt sich heraus, dass die Menge der reellen Zahlen ebenfalls einen Körper bildet.

den übrigen, bei Weitem reizvolleren Dingen abschreckt. Dieses eine nämlich nur bewirkt er, dass zwei Flächen, von denen eine in die andere übergeht, wenn man bis ins Unendliche mit dem Einbeschreiben fortschreitet, sich einander nähern bis auf eine Differenz, die kleiner ist als eine beliebige zugewiesene, selbst wenn die Anzahl der Einschreibungen nur endlich bleibt.«

Frühe Epsilontik

In der Tat nähert Leibniz die Fläche unter einer Kurve durch die Flächen von einbeschriebenen Rechtecken an (siehe Bilder unten). So pflegt man heute das Integral zu definieren; aber nach Leibniz hat das erst Bernhard Riemann (1826–1866) in dieser Weise ausgedrückt. Vor allem bringt Leibniz in diesem Vorspann eine tiefe Einsicht in das infinitesimal Kleine auf den Punkt! Eine Differenz zwischen zwei Größen ist infinitesimal klein, wenn sie kleiner gemacht werden kann als jede vorgegebene positive Zahl. Das ist der moderne Zugang zur Analysis, der den Spitznamen »Epsilontik« trägt, weil dort kleine Zahlen mit den traditionellen Namen ε (epsilon) und δ (delta) die Hauptrollen spielen. Nur hat bis zur Wiederentdeckung des Manuskripts niemand diese Ideen bei Leibniz erwartet.

Man stelle sich vor, das Werk wäre damals publiziert worden. Dann wären den Mathematikern einige Jahrhunderte des Arbeitens auf unsicherem Untergrund erspart geblieben. Sprichwörtlich geworden ist der Spott des Philosophen und anglikanischen Theologen George Berkeley (1685–1753) aus seinem Werk »The Analyst« von 1734:

> *Und was sind diese verschwindenden Differenzen? Sie sind weder endliche Größen noch unendlich kleine Größen noch einfach gar nichts. Sollen wir sie nicht einfach die Geister dahingeschiedener Größen nennen?*

Leibniz hätte bereits in den 1670er Jahren alle diese Gespenster mit einem Mal aus der Analysis fortgejagt.

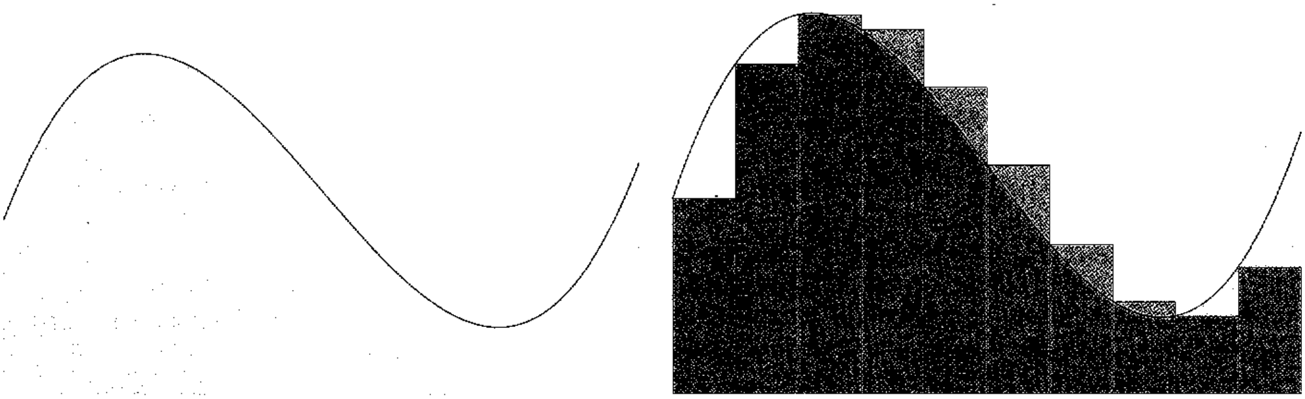
Wie schon aus dem Vorspann hervorgeht, muss Leibniz befürchten, dass seine Zeitgenossen seinem Umgang mit dem Infinitesimalen nicht folgen könnten. Nur so leuchtet ein, dass er nach seiner Pariser Zeit den unterschiedlichsten Korrespondenzpartnern andere Erklärungen anbietet, die zwar hinter die Definition in »De quadratura arithmetica«

Wie groß sind Indivisible?

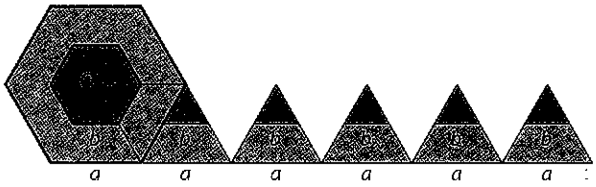
Nach der Quantitätenlehre des Aristoteles ist Teilbarkeit die bestimmende Eigenschaft einer Größe. Ist etwas nicht teilbar, dann ist es schlichtweg keine Größe. Nikolaus von Kues (Cusanus, 1401–1464) folgte Aristoteles und präzisierte: Größen (quanta) können vergrößert oder verkleinert werden, aber das absolute Maximum und das absolute Minimum sind keine Größen mehr, es sind Nicht-Größen (non quanta). Größen können nicht in Nicht-Größen geteilt werden.

Galileo Galilei (1564–1642) kannte die mathematischen Schriften des Nikolaus und verwendet dessen Begriffspaare »finitus–infinitus«, »divisibilis–indivisibilis« und »quantum–non quantum« (in italienischer Version) in seinen Schriften. In seinen »Discorsi«, 1638 in Leiden veröffentlicht, kämpft Galilei mit scheinbaren Widersprüchen bei der Verwendung von Indivisiblen. Beim »Aristotelischen Rad« (Bild rechts oben) geht es um das Abrollen zweier regelmäßiger Polygone mit unterschiedlichen Durchmessern, die auf einer gemeinsamen Achse befestigt sind. Beim Abrollen eines Sechsecks sieht man klar, dass es »Lücken« zwischen den abrollenden Dreiecken gibt. Bei Vergrößerung der Eckenzahl werden diese Lücken kleiner.

Man berechnet den Inhalt der Fläche unter einer Kurve (links), indem man diese Fläche durch Summen von Rechtecksflächen (»riemannsche Summen«) annähert. Je schmäler und entsprechend zahlreicher man die Rechtecke wählt, desto näher kommt deren Gesamtfläche dem gesuchten Flächeninhalt. Entscheidend ist, dass der Unterschied der Flächen kleiner gemacht werden kann als jede beliebig kleine positive Zahl.



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / CHRISTOPH PÖPPE



SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH: THOMAS SONAR

Nun wagt Galilei den Sprung zu einem Kreis, den er für ein Polygon mit unendlich vielen Seiten hält (Bild unten). Jede dieser Seiten ist zwangsläufig eine Indivisible, ein Punkt, also eine Nicht-Größe, aber unendlich viele dieser Nicht-Größen bilden nun offenbar einen endlichen Umfang!

SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH: THOMAS SONAR

Also können unendlich viele Indivisiblen eine divisible Größe bilden. Mit dieser Aussage steht Galilei im Gegensatz zu Cusanus. Insbesondere verlieren für ihn gewisse Gesetze, die im Endlichen gelten, ihre Gültigkeit im Unendlichen. Zudem hat Galilei mit einem weiteren scheinbaren Paradoxon zu kämpfen, nämlich dass im Grenzfall der große und der kleine Kreis denselben Umfang zu haben scheinen.

Leibniz hat Galileis »Discorsi« genau studiert, und zwar bereits zu Beginn seiner Zeit in Paris. Er weist die Betrachtung von Punkten zurück, eben weil sie Nicht-Größen sind. Und schon im Herbst 1672 definiert er Indivisible als solche Größen, die kleiner als eine beliebige gegebene Größe sind, behält also für seine neuen Infinitesimalen den Begriff der Indivisiblen bei. So verstanden stimmt sein Satz: »Eine Indivisible zu einer Indivisible addiert bewirke nichts, es sei denn, es werden unendlich viele Indivisiblen addiert.«

Für Leibniz müssen die Gesetze des Endlichen auch im Unendlichen weiter gelten; auch damit steht er im Gegensatz zu Galilei. Während Galilei auf der Basis der Begriffe des Nikolaus von Kues ein Aktualunendlich akzeptiert und mit Nicht-Größen operiert, hat Leibniz die Indivisiblen (in seiner Definition) zu Variablen gemacht. Eine infinitesimale Größe hat keine feste Breite oder Dicke, sondern sie ist immer kleiner als eine gegebene Größe, und je kleiner diese gegebene Größe wird, umso kleiner wird die Infinitesimale. Aus der statischen Indivisiblen ist eine dynamische Größe geworden.

zurückfallen, aber eingängiger sind. Im »Journal de Trévoux« gibt Leibniz 1701 eine Art physikalischer Erklärung:

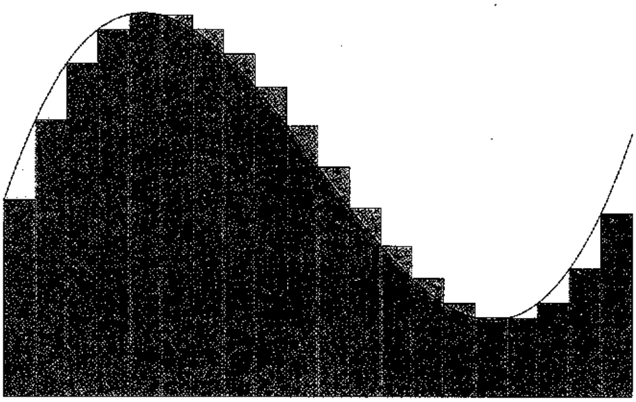
Ich füge hinzu, ... dass man hier das Unendliche nicht im strengen Sinne auffassen muss, sondern bloß so, wie man in der Optik sagt, dass die Strahlen der Sonne von einem unendlich fernen Punkt kommen und so als parallel angesehen werden.

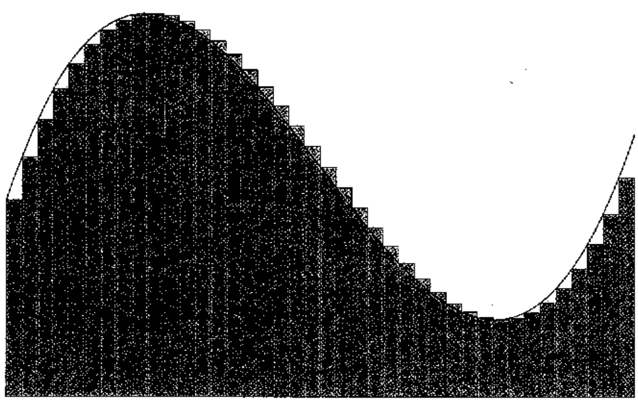
Schon im Juli 1695 hat Leibniz eine Erklärung auf Grundlage der klassischen antiken Mathematik gegeben:

Ich halte nämlich mit Euklid ... homogene Größen nur dann für vergleichbar, wenn die eine [Größe], falls man sie mit einer endlichen Zahl multipliziert, die andere [Größe] übertreffen kann. Und was sich nicht um eine solche Größe unterscheidet, erkläre ich für gleich. Dies haben auch Archimedes und alle anderen nach ihm so gehalten. Und genau dies ist gemeint, wenn man sagt, dass die Differenz [zweier Größen] kleiner als eine beliebige gegebene [Größe] ist.«

»Homogene Größen« würde man heute »Größen mit gleicher Maßeinheit« nennen. Zwei Längen oder zwei Flächen sind zueinander homogen, nicht aber eine Fläche und ein Volumen. Das archimedische Axiom, das Leibniz zitiert (das aber gar nicht von Archimedes stammt), besagt: Die kleinere von zwei homogenen Größen, mit einer hinreichend großen (natürlichen) Zahl multipliziert, übertrifft die größere.

Manchmal interpretiert Leibniz »unendlich klein« aber auch als eine Art von Konvergenz gegen null, etwa wenn er am 2. Februar 1702 an Pierre Varignon schreibt:





SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT / CHRISTOPH PÖPPE

Zugleich muss man jedoch bedenken, dass die unvergleichbar kleinen Größen, selbst im gebräuchlichen Sinne genommen, keineswegs unverändert und bestimmt sind, dass sie vielmehr, da man sie beliebig klein annehmen kann, in unseren geometrischen Überlegungen dieselbe Rolle spielen wie die unendlich kleinen im strengen Sinne. Denn wenn ein Gegner unserer Darlegungen widersprechen wollte, so zeigt sich durch unseren Kalkül, dass der Irrtum geringer sein wird als jeder bestimmbare Irrtum, da es in unserer Macht ist, das unvergleichbar Kleine, das man ja immer von beliebig kleiner Größe nehmen kann, für diesen Zweck klein genug zu halten.

Allgemein fällt auf, dass Leibniz selbst dann noch häufig von Indivisiblen schreibt, wenn er doch eigentlich Infinitesimale meint. Wie kann man das erklären? Eberhard Knobloch hat eine Linie aufgedeckt, die von dem mittelalterlichen Philosophen und Mathematiker Nikolaus von Kues (Cusanus) über Galileo Galilei bis hin zu Leibniz führt, und entlang dieser Linie erfahren wir mehr über das leibnizsche Verständnis der Indivisiblen (siehe »Wie groß sind Indivisible?«, S. 64/65).

Leibniz und die Nichtstandardanalysis

Unendlich kleine Größen gibt es nicht – das ist der übliche Standpunkt der Analysis. Entweder sind diese merkwürdigen dx und dy gleich null, dann darf man nicht durch sie dividieren – was man aber möchte, damit man mit Ausdrücken wie dy/dx rechnen kann. Oder sie sind ungleich null, dann darf man sie nicht vernachlässigen und ihr Quadrat auch nicht – woran aber die ganze Analysis hängt. Also muss man durch sie dividieren, solange sie noch endlich sind, und sie dann in einem Grenzwertprozess, der eigens zu definieren ist, gegen null gehen lassen. Das ist heute das Standardverfahren. Leibniz verwendete es zwar, mochte es aber seinen Zeitgenossen nicht zumuten. Es ist logisch einwandfrei, aber lästig und kommt der Intuition nicht gerade entgegen.

Daher hat es nicht an Versuchen gefehlt, die Idee vom unendlich Kleinen, die eigentlich unmittelbar einleuchtet und mit der schon Cavalieri seine Erfolge gefeiert hatte, in mathematisch sauberer und vor allem widerspruchsfreier Weise zu formulieren. Das ist tatsächlich möglich. Eine erste Formulierung haben Detlef Laugwitz (1932–2000) und Curt Schmieden (1905–1991) bereits 1958 veröffentlicht.

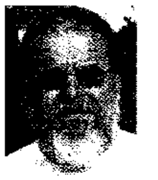
Dabei griffen sie auf das klassische Verfahren zur Definition von Irrationalzahlen zurück (siehe »Was ist eine reelle Zahl?«, S. 63). Statt aber nur jeder Cauchy-Folge einen Grenzwert zuzuweisen und diesen zu einer neuen Zahl zu erklären, ließen Laugwitz und Schmieden alle Folgen zu, auch nicht konvergente. So definiert zum Beispiel die Folge 1, 2, 3, 4, 5, ... die unendlich große Zahl Ω. In der Tat lassen sich die gewöhnlichen Rechenoperationen auf die Menge aller »Ω-Zahlen« übertragen; man kann also mit unendlich großen und kleinen Zahlen rechnen. Allerdings ist die so gewonnene Menge kein Körper, denn es gibt Zahlen, deren Produkt null ist, so dass die Umkehrung der Multiplikation (die Division) nicht immer eindeutig ist. Um diesen Makel zu beheben, muss man ein sehr starkes, nichtkonstruktives Mittel einsetzen, einen so genannten Ultrafilter, dessen Existenz wiederum nur mit dem Auswahlaxiom zu zeigen ist.

Heute betreibt man die Nichtstandardanalysis meistens mit dem Körper der »hyperreellen Zahlen« von Abraham Robinson (1918–1974). Dieser Zugang stammt aus der Modelltheorie, die ihrerseits zur mathematischen Logik gehört.

Es gibt also eine Möglichkeit, mit unendlich kleinen und unendlich großen Größen zu rechnen, ohne den Widersprüchen der Indivisiblen zum Opfer zu fallen. Aber so hat Leibniz nicht gedacht! Es ist nicht möglich, seinen Umgang mit den infinitesimalen Größen als Frühform der Nichtstandardanalysis zu interpretieren, selbst wenn man seine strenge Definition aus »De quadratura arithmetica« außer Acht lassen würde.

Man ist stets in der Gefahr, Mathematikgeschichte umzudeuten und den Altvorderen Gedanken zu unterstellen, die sie so gar nicht haben konnten. Aber auch wenn wir Leibniz die Konstruktionen der modernen Nichtstandardanalysis nicht zuschreiben können, tut das seiner Genialität keinen Abbruch. Immerhin wissen wir seit 1993, dass er in der Lage war, die Gespenster des unendlich Kleinen aus seiner Analysis zu verbannen, wie es nach ihm erst den Mathematikern des 19. Jahrhunderts gelingen sollte.

DER AUTOR



Thomas Sonar hat in Hannover studiert und in Stuttgart promoviert. Nach Stationen beim DLR in Göttingen (siehe seinen Artikel in Spektrum der Wissenschaft 7/1996, S. 72) und an der Universität Hamburg wurde er Professor für Technomathematik an der Technischen Universität Braunschweig und Abteilungsleiter der Abteilung »Partielle Differenzialgleichungen« am Institut »Computational Mathematics« (Spektrum de Wissenschaft 4/2009, S. 78). Daneben befasst er sich intensiv mit der Geschichte der Mathematik. Seinen Artikel widmet er dem Großmeister der Leibnizforschung, Eberhard Knobloch.

QUELLEN

Knobloch, E.: Galilei und Leibniz. Wehrhahn, Hannover 2012

Leibniz, G. W.: De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis. Kritisch herausgegeben und kommentiert von Eberhard Knobloch. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1993. Zusammen mit einer Übersetzung ins Deutsche von Otto Hamborg abrufbar unter **http://www.hamborg-berlin.de/a_persona/interessen/Leibniz_komplett.pdf.** Darin als Anhang: Geschichte und Ursprung der Differenzialrechnung

Sonar, Th.: 3000 Jahre Analysis. Springer, Heidelberg 2011

Sonar, Th.: Zur Geschichte des Prioritätsstreits zwischen Leibniz und Newton. Springer Spektrum, Heidelberg 2016

Spalt, D. D.: Curt Schmieden's Non-Standard Analysis – A Method of Dissolving the Standard Paradoxes of Analysis. In: Centaurus 43, S. 137–174, 2001

Spalt, D. D.: Die Analysis im Wandel und im Widerstreit. Eine Formierungsgeschichte ihrer Grundbegriffe. Karl Alber, Freiburg und München 2015

Dieser Artikel im Internet: **www.spektrum.de/artikel/1411560**