7. Das Irrationale und das Unendlichkleine

In einer anderen Form als in der Reihe der ganzen Zahlen tritt uns das Unendliche entgegen an dem unendlicher Teilung fähigen *Kontinuum*, insbesondere dem Kontinuum der Zeit und des Raumes. Hier ist die zweite offene Stelle im oben geschilderten Aufbau des mathematischen Zahlenreiches. Das Altertum hat uns zum Problem des Kontinuums zwei wichtige Beiträge hinterlassen: a) eine weitgehende Analyse der mathematischen Frage, wodurch die einzelne Stelle im Kontinuum fixiert werden kann, und b) die Aufdeckung der philosophischen Paradoxien, welche im anschaulichen Wesen des Kontinuums liegen.

a) Die reine Geometrie der Griechen, sich über die Inexaktheit des sinnlich Gegebenen hinausschwingend, wendet die Idee der Existenz (nicht nur auf die natürlichen Zahlen, sondern auch) auf die Punkte des Raumes an. Die Entdeckung des Irrationalen an dem Verhältnis $\sqrt{2}$ zwischen Seite und Diagonale eines Quadrates lehrte, daß die Brüche nicht die allein möglichen Maßzahlen eines Streckenverhältnisses, nicht die einzigen „reellen Zahlen" sind. In den Platonischen Dialogen spürt man den tiefen Eindruck, den diese mathematische Entdeckung auf das entstehende wissenschaftliche Bewußtsein der damaligen Zeit gemacht hat. Unabhängig von den besonderen geometrischen Konstruktionen, die zunächst einzelne Irrationalitäten wie $\sqrt{2}$ lieferten, erkannte *Eudoxos* die allgemeinen Grundlagen des Phänomens. 1. An Stelle der unhaltbar gewordenen Kommensurabilität setzt er das Axiom: Sind a und b irgend zwei Strecken, so läßt sich a immer so oft zu sich selbst hinzufügen, etwa $n$mal, bis die Summe na größer als b geworden ist. Dies bedeutet, daß alle Strecken von vergleichbarer Größenordnung untereinander sind, daß es *weder ein aktual Unendlichkleines noch ein aktual Unendlichgroßes* im Kontinuum gibt. 2. Und wodurch ist das einzelne Streckenverhältnis gekennzeichnet? *Eudoxos* antwortet: Zwei Streckenverhältnisse $a:b$, $a':b'$ sind einander gleich, wenn für beliebige natürliche Zahlen m und n, welche die in der ersten Zeile stehende Beziehung erfüllen, immer auch die darunter gesetzte Relation der zweiten Zeile gilt:

$$\text{(I)} \begin{cases} na > mb \\ na' > mb' \end{cases} \quad \text{(II)} \begin{cases} na = mb \\ na' = mb' \end{cases} \quad \text{(III)} \begin{cases} na < mb \\ na' < mb' \end{cases}$$

Kennzeichnend für die einzelne reelle Zahl α ist demnach der Schnitt, den sie im Gebiete der rationalen Zahlen erzeugt, durch die Einteilung aller Brüche m/n in die drei Klassen derjenigen, welche (I) kleiner als α, (II) gleich α und (III) größer sind als α. Die mittlere Klasse ist entweder leer oder enthält nur einen einzigen Bruch. Das erste Axiom garantiert dafür, daß nicht zwei verschiedene Strecken zur festgewählten Einheitsstrecke in demselben Verhältnis stehen können. Auf diesem Fundament errichtet sich auch bei *Euklid* die Proportionenlehre; *Archimedes* gründet darauf seine allgemeine Exhaustionsmethode.

Erst im 19. Jahrhundert führt die moderne Mathematik das Problem zu Ende. Für *Eudoxos* ist die reelle Zahl gegeben als das Verhältnis zweier vorliegender Strecken; was für Streckenverhältnisse existieren, darüber sollten uns also die Axiome der Geometrie unterrichten. Nun ist es aber in der euklidischen Geometrie nicht möglich (durch Konstruktion mit Lineal und Zirkel) zu einer vorgelegten Strecke 1 die Strecke $\sqrt[3]{2}$ nachzuweisen, welche das Delische Problem der Würfelverdoppelung löst, oder die Strecke π, welche gleich dem Umfange des Kreises vom Durchmesser 1 ist. Dennoch sind wir von ihrer Existenz auf Grund von Stetigkeitsschlüssen überzeugt: wenn die Würfelkante von 1 bis zur doppelten Größe ansteigt, wächst das Würfelvolumen stetig von 1 bis 8 und muß deshalb einmal den Wert 2 passieren; die Strecke π können wir von unten und oben her mit beliebiger Genauigkeit approximieren durch die euklidisch konstruierbaren Umfänge der dem Kreise ein- und umbeschriebenen regulären 6, 12, 24, ...-Ecke. Wir drehen also den Spieß um: *Jeder willkürlich vorgegebene Schnitt* im Gebiet der rationalen Zahlen, d. i. jede irgendwie bewerkstelligte Aufteilung aller rationalen Zahlen in drei Klassen I, II, III bestimmt eine reelle Zahl. (Die einzigen Forderungen, die erfüllt sein müssen, sind diese: weder I noch III ist leer; II enthält höchstens einen einzigen Bruch, I keinen größten und III keinen kleinsten; jede Zahl aus I ist kleiner als alle in II und III enthaltenen Brüche, jede Zahl der Klasse III größer als die in I und II.) Wir haben — nach *Dedekind*, Stetigkeit und Irrationalzahlen, 1872 — keinen Anlaß, nur einen Teil dieser Schnitte als reelle Zahlen zuzulassen. Und in der Geometrie postulieren wir dann als Axiom (Dedekindsches Axiom) die Existenz derjenigen Strecke, welche zu der vorgegebenen Einheitsstrecke e in dem arithmetisch durch den Schnitt festgelegten Verhältnis steht. Da nach *Eudoxos* umgekehrt das Verhältnis einer beliebigen Strecke a zur Einheitsstrecke einen Schnitt bestimmt, verbürgt das Dedekindsche Axiom die *Vollständigkeit* der geometrischen Elemente: das System der Punkte ist, bei Aufrechterhaltung der sämtlichen Axiome einschließlich des Eudoxischen, keiner Erweiterung mehr fähig *(Hilbert)*. In dieser logischen Vollständigkeit spiegelt sich die anschauliche Lückenlosigkeit der Punkte im Raume wieder. Mit dem Dedekindschen Zahlbegriff macht sich die Analysis unabhängig von der Geometrie; erst so ist sie fähig zur Analyse der Stetigkeit und liefert der Geometrie die Mittel zum Beweise der Stetigkeitssätze von folgender Art: Eine stetige Linie, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkt verbindet, trifft die Peripherie. Daß sie bei *Euklid* noch der näheren Begründung entbehren, darauf hat schon *Leibniz* im Hinblick auf die erste bei *Euklid* vorkommende Konstruktion, die des gleichseitigen Dreiecks ABC aus den Punkten A und B, aufmerksam gemacht: Man schlägt um A einen Kreis, der durch den Punkt B geht, um B einen Kreis, der durch A geht; es werde nicht bewiesen, daß diese Kreise einen Punkt C gemeinsam haben. — Ein dem Schnitt gleichwertiges Mittel zur Festlegung der reellen Zahl ist die *unendliche Folge* ineinander eingeschachtelter rationaler Intervalle $a_n b_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), deren Länge $b_n - a_n$ mit unbegrenzt wachsendem Index n gegen 0 konvergiert (vgl. das Beispiel π). Da der Bruch logisch nicht komplizierter ist als die natürliche Zahl — er ist ja durch zwei natürliche Zahlen, Zähler und Nenner bestimmt —, können wir das Fazit der historischen Entwicklung des Problems *a)* mit den Worten ziehen:

Objekt der Zahlentheorie sind die einzelnen natürlichen Zahlen, Objekt der Kontinuumslehre die möglichen Mengen (oder die unendlichen Folgen) natürlicher Zahlen.

b) Das Wesen des Kontinuums kennzeichnet scharf ein uns überliefertes Fragment des *Anaxagoras:* „Im Kleinen gibt es kein Kleinstes, sondern es gibt immer noch ein Kleineres. Denn was ist, kann durch keine noch so weit getriebene Teilung je aufhören zu sein.“ Das Kontinuum ist nicht aus diskreten Elementen zusammengesetzt, die „voneinander abgetrennt, wie mit dem Beile voneinander abgehauen“ sind. Der Raum ist nicht nur in dem Sinne unendlich, daß man in ihm nirgendwo an ein Ende kommt; sondern an jeder Stelle ist er sozusagen nach innen hinein unendlich, ein Punkt läßt sich nur durch einen ins Unendliche fortschreitenden Teilungsprozeß von Stufe zu Stufe genauer und genauer fixieren. Das steht in Kontrast zu dem für die Anschauung ruhenden fertigen Dasein des Raumes. Diesen Charakter teilen der kontinuierliche Raum und die kontinuierlich sich abstufenden Qualitäten den Dingen der Außenwelt mit: ein wirkliches Ding kann niemals adäquat gegeben sein, in einem ins Unendliche fortschreitenden Prozeß immer neuer und genauerer Erfahrungen entfaltet es seinen „inneren Horizont“; es ist, wie *Husserl* betont, eine Grenzidee im Kantischen Sinne. Daher ist es unmöglich, das wirkliche Ding als ein seiendes, geschlossen und in sich vollendet, zu setzen. So treibt das Kontinuumproblem zum erkenntnistheoretischen *Idealismus*; unter anderen bezeugt *Leibniz*, daß das Suchen nach einem Ausweg aus dem „Labyrinth des Kontinuum“ es war, was ihn zuerst zu der Auffassung von Raum und Zeit als Ordnungen der Phänomene hingeführt hat. „Daraus, daß der mathematische Körper sich nicht in erste Grundmomente auflösen läßt, folgt ohne weiteres, daß er schlechterdings nichts Reales, sondern nur ein gedankliches Gebilde ist, das nichts als eine Möglichkeit von Teilen, keineswegs aber etwas Wirkliches bezeichnet“ (Briefwechsel zwischen *Leibniz* und *de Volder;* Philos. Schr., ed. Gerhardt, II, S. 268).

Im Gegensatz zu diesem Wesen des Kontinuums konzipiert *Leibniz*, da er, anders als *Kant*, metaphysisch den Phänomenen ein Fundament in einer Welt absoluter Substanzen geben muß, die Idee der *Monade:* „In dem Ideellen oder dem Kontinuum geht das Ganze den Teilen voraus ... Die Teile sind hier nur potentiell; in den wirklichen (d. i. substantiellen) Dingen aber geht das Einfache den Aggregaten voraus und die Teile sind aktuell und vor dem Ganzen gegeben. Diese Erwägungen heben die Schwierigkeiten in Betreff des Kontinuums: Schwierigkeiten, die nur dann entstehen, wenn man das Kontinuum als etwas Reales ansieht, das an sich vor aller Teilung unsererseits wirkliche Teile besitzt, und wenn man die Materie für eine Substanz hält“ (Brief an *Remond*; Philos. Schr. III, S. 622).

Die Unmöglichkeit, das Kontinuum als ein starres Sein zu fassen, kann nicht prägnanter formuliert werden als durch das bekannte Paradoxon des *Zenon* von dem Wettlauf zwischen Achilleus und der Schildkröte. Der Hinweis darauf, daß die sukzessiven Partialsummen der Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots,$$

$1-1/2^n$ ($n=1, 2, 3, \ldots$) nicht über alle Grenzen wachsen, sondern gegen 1 konvergieren, durch den man heute das Paradoxon zu erledigen meint, ist gewiß eine wichtige, zur Sache gehörige und aufklärende Bemerkung. Wenn aber die Strecke von der Länge 1 wirklich aus unendlich vielen Teilstrecken von der Länge $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... als „abgehackten" Ganzen besteht, so widerstreitet es dem Wesen des Unendlichen, des „Unvollendbaren", daß Achilleus sie alle schließlich durchlaufen hat. Gibt man diese Möglichkeit zu, so wäre nicht einzusehen, warum nicht eine Maschine auch eine unendliche Folge distinkter Entscheidungsakte in endlicher Zeit zum Abschluß bringen könnte, indem sie etwa das erste Resultat nach $^1/_2$ Minute lieferte, das zweite $^1/_4$ Minute darauf, das dritte $^1/_8$ Minute später als das zweite usf.; und so könnte man, wenn auch das auffassende Gehirn analog funktionierte, die Durchlaufung aller natürlichen Zahlen und die sichere Entscheidung der an sie gerichteten Existentialfragen mit Ja oder Nein zuwege bringen! — *Descartes* ringt mit der Vorstellung, daß in der Bewegung einer Flüssigkeit die materiellen Korpuskeln sich teilen müssen ins Unendliche, „oder wenigstens ins Unbestimmte *(in indefinitum)*, und zwar in so viele Teile, daß man sich in Gedanken keinen noch so kleinen vorstellen kann, von welchem man nicht einsähe, daß er tatsächlich in noch viel kleinere geteilt ist". Es bleibt ihm ein Rätsel, demgegenüber er sich auf die Unbegreiflichkeit der Allmacht Gottes beruft. *Euler* erklärt in seiner „Anleitung zur Naturlehre" (Opera postuma II, 1862, S. 449—560), welche in großartiger Klarheit die Grundlagen der Naturphilosophie seiner Zeit zusammenfaßt: Ungeachtet die Körper ins unendliche teilbar sind, so ist doch der Satz, daß ein jeglicher Körper aus unendlich vielen („letzten") Teilen bestehe, schlechterdings falsch und steht sogar mit der unendlichen Teilbarkeit in offenbarem Widerspruch (Kapitel 2, 12). Im Kantischen System beziehen sich auf das Kontinuum die ersten beiden Antinomien der reinen Vernunft[1]).

[1]) Die erste ist freilich recht schief formuliert; nicht darum handelt es sich nach der Argumentation, ob die Welt einen Anfang in der Zeit hat oder

Drei Versuche sind in der Geschichte des Denkens unternommen, das Kontinuum dennoch als Sein an sich zu fassen. Der erste radikalste läßt es aus zählbaren diskreten Elementen, Atomen, bestehen. Für die *Materie* ist dieser Weg, schon im Altertum von *Demokrit* beschritten, in der modernen Physik mit dem glänzendsten Erfolg zu Ende geführt worden. Für den *Raum* selber scheint *Platon* zuerst einen konsequenten Atomismus entworfen zu haben — in klarem Bewußtsein des gesteckten Zieles: die „Rettung" des Phainomenon von der Idee her. Erneuert wurde die atomistische Theorie des Raumes innerhalb der islamischen Philosophie von den Mutakallimun (vgl. darüber *Laßwitz*, Geschichte der Atomistik, I, 1890, S. 139—150), im Abendlande durch *Giordano Brunos* Lehre vom Minimum. Noch *Hume* wandelt sich in seiner Raum-Zeit-Lehre (Treatise on human nature, 2. Teil, 4. Abschnitt) die von ihm eigentlich gemeinte Vagheit des sinnlich Gegebenen unter den Händen um in eine Zusammensetzung aus unteilbaren Elementen. Angeregt durch die Quantentheorie, taucht der Gedanke heute wieder in Diskussionen über die Grundlagen der Physik auf. Aber er ist bisher immer bloße Spekulation und in den ersten Anfängen stecken geblieben, hat niemals den geringsten Kontakt mit der Wirklichkeit gewonnen. Wie soll man von ihm aus die räumlichen Maßbeziehungen verstehen? Baut man ein Quadrat aus „Steinchen" auf, so liegen in der Diagonale ebenso viele Steinchen wie in der Richtung der Seite; die Diagonale sollte also ebenso lang sein wie die Seite. *Hume* muß denn auch zugeben, daß das „ebenso richtige wie einleuchtende" Prinzip des Maßvergleichs von Linien und Flächen durch die Anzahl der zusammensetzenden Elemente in Wahrheit nutzlos ist. *Riemann* stellt in seinem Vortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" (1854) die Alternative auf, „daß bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Maßverhältnisse schon in dem Begriff dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muß".

---

nicht, sondern ob im Augenblick endlich oder unendlich viele erfüllte Zeitmomente vergangen sind. In einer stetig erfüllten Zeit ist das letzte der Fall, mag sie nun auf Grund eines ihr innewohnenden oder an sie herangebrachten Maßprinzips endlich- oder unendlichlang sein.

Der zweite Versuch ist das Unendlichkleine. Ausführlich und scharfsinnig wird am ersten Tag der „Discorsi e dimostrazioni" von *Galilei* darüber diskutiert. Wie ich eine gerade Linie zu einem Achteck oder Tausendeck knicken kann, so kann ich sie nach *Galilei* auch in ein Polygon von unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten verwandeln, dadurch daß ich sie auf einen Kreis wickle; bin also nicht auf einen das Ziel niemals erreichenden Grenzprozeß angewiesen[1]).

Wird ein Rad auf einer horizontalen Geraden abgerollt, so erscheint jeder der konzentrischen kleineren Kreise zu einer horizontalen Gerade h von gleicher Länge ausgestreckt *(rota Aristotelis)*. Ersetzt man aber das Kreisrad durch ein reguläres Polygon von vielen Seiten, so bilden die „bedeckten" Strecken auf h, in welche sukzessive die Seiten des konzentrischen Polygons hineinfallen, eine unterbrochene Linie. Beim Kreisrad muß man also annehmen, daß h aus einer unendlich dichten Aufeinanderfolge bedeckter und unbedeckter Strecken bestehe. „Hier liegt eine Methode vor", heißt es (Opere complete, ed. Alberi, XIII, S. 51), „die uns aus vielen verwirrenden Labyrinthgängen befreit und uns ein Verständnis eröffnet von der schon besprochenen Kohäsion, von der Verdünnung und Verdichtung ohne Annahme leerer Räume und der Durchdringung der (materiellen) Körper: alles Schwierigkeiten, denen wir entgehen durch die Annahme der Zusammensetzung aus Unteilbarem". Besteht eine Kurve aus unendlich vielen geraden „Linienelementen", so liegt der Begriff der Tangente auf der Hand: sie gibt die Richtung eines einzelnen Linienelementes an, ist die Verbindungsgerade zweier „konsekutiven" Kurvenpunkte. Wer aber die Galileische Hypothese ablehnt, kann die Tangente im Kurvenpunkte P nur erklären als die Grenze, der sich die Sekante PP' unbegrenzt nähert, wenn der zweite bewegliche Kurvenpunkt P' gegen P konvergiert. Sehr instruktiv ist die

[1]) *Hankel* sagt (Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipzig 1874): „Der Gedanke, daß man, wie weit man auch in der Reihe der Vielecke gehen möge, jene Kreisfläche nie erreiche, obgleich man ihr immer näher und ganz beliebig nahe kommt, spannt das vorstellende Denken in dem Maße, daß es um jeden Preis diese Lücke, welche gleichsam zwischen der Wirklichkeit und dem Ideal liegt, auszufüllen strebt, und psychologisch gezwungen ist, den — unendlich kleinen oder unendlich großen? — Schritt zu machen und zu sagen: der Kreis ist ein Polygon mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten. Die Alten aber haben diesen Schritt nicht getan; solange es griechische Geometer gab, sind dieselben immer vor jenem Abgrunde des Unendlichen stehen geblieben..."

Diskussion darüber zwischen *Johann Bernoulli* und *Leibniz*. *Leibniz* sagt (Math. Schriften, ed. Gerhardt, III, S. 536): „Nehmen wir nämlich an, daß es in der Linie tatsächlich die Abschnitte gibt, die durch $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, ... zu bezeichnen sind, und daß *alle* Glieder dieser Reihe tatsächlich existieren, so schließen Sie daraus, daß es auch ein unendlichkleines Glied gibt; meiner Meinung nach folgt daraus jedoch nichts weiter, als daß es tatsächlich jeden beliebigen *endlichen* angebbaren Bruch von jeder beliebigen Kleinheit gibt." Aber *Bernoulli* repliziert (a.a.O., S. 563): „Wenn *zehn* Glieder vorhanden sind, so existiert notwendig das *zehnte*, wenn *hundert*, so notwendig das *hundertste*, ..., wenn also der Zahl nach *unendlich viele* Glieder vorliegen, so existiert das *unendlichste* (infinitesimale) Glied."

Der Grenzprozeß trug den Sieg davon; denn der *Limes* ist ein unvermeidlicher Begriff, dessen Wichtigkeit von der Annahme oder Verwerfung des Unendlichkleinen nicht berührt wird. Hat man ihn aber einmal gefaßt, so sieht man, daß er das Unendlichkleine überflüssig macht. Die infinitesimale Analyse will aus dem durch elementare Gesetze beherrschten Verhalten im Unendlichkleinen durch Integration auf das Verhalten im Endlichen schließen; so z. B. aus dem universellen Attraktionsgesetz für zwei massenerfüllte „Volumelemente" auf die Größe der Anziehung beliebig gestalteter, homogen oder inhomogen mit Masse belegter ausgedehnter Körper. Deutet man aber das Unendlichkleine hier nicht „potentiell", im Sinne des Grenzprozesses, so hat das eine mit dem andern nichts zu tun, die Vorgänge im Endlichen und im Unendlichkleinen werden ganz unabhängig voneinander, man zerschneidet das verknüpfende Band. Hier hat *Eudoxos* zweifellos den richtigen Blick besessen.

Übrigens wüßte ich nicht, daß man sich hinsichtlich des Unendlichkleinen, das ein Begriff voller Verschwommenheit und voller „Unbegreiflichkeiten" blieb — „die Unbegreiflichkeiten der Mathematik" ist ein Lieblingsausdruck der damaligen Zeit —, im 18. Jahrhundert je zu der klaren Fassung des Griechen durchgerungen hätte. Unmöglich ist es nämlich keineswegs, eine folgerichtige „nicht-archimedische" Größenlehre aufzubauen[1]), in welcher das (meistens nach *Archimedes*

[1]) Vgl. etwa *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Kap. II, § 12. Ein schon von *Leibniz* und *Wallis* diskutiertes Beispiel unendlichkleiner Größen sind

benannte) Axiom des *Eudoxos* nicht gilt; aber man sieht sofort, daß sie für die Analysis gar nichts leistet. *Newton* und *Leibniz* hatten wohl die richtige Auffassung, daß es sich in der Infinitesimalrechnung stets nur um den *Grenzübergang* zu Null handelt, einigermaßen deutlich ausgesprochen; aber die letzte Klarheit, die Einsicht, daß die Durchführung des Grenzprozesses nicht bloß den Wert des Limes zu bestimmen, sondern *seine Existenz erst zu garantieren* hat, mangelt ihnen doch noch. Darum befindet sich auch *Leibniz* noch ganz im unklaren über die Summation unendlicher Reihen. Die Limestheorie gewinnt nur langsam an Boden. Mit Entschiedenheit verkündet *d'Alembert* 1784 in der Encyclopédie: *La théorie de la limite est la base de la vraie métaphysique du calcul différentiel. Il ne s'agit point, comme on le dit ordinairement, des quantités infiniment petites; il s'agit uniquement des limites de quantités finies.*" Und erst *Cauchy* gelingt zu Beginn des 19. Jahrhunderts die konsequente Durchführung. *Cauchy* ermittelt insbesondere das richtige Kriterium für die *Konvergenz* der unendlichen Reihen, die Bedingung dafür, daß durch einen unendlichen Prozeß eine Zahl als Grenzwert erzeugt wird. Der Beweis des Kriteriums aber erfordert jene Festlegung des Zahlbegriffes, wie sie dann im Dedekindschen Schnittprinzip erreicht wurde.

Der dritte Versuch, das Kontinuum im Platonischen Sinne zu „retten", liegt in der modernen mengentheoretischen Begründung der Analysis vor.

Literatur

R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen. Braunschweig 1872; 3. Aufl. 1905.

Literatur über die Geschichte des Problems des Kontinuums und des Irrationalen:

P. Tannery, Pour l'histoire de la science hellène. Paris 1887.

E. Frank, Platon und die sogenannten Pythagoreer. Halle 1923.

H. Hasse und *H. Scholz*, Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. Berlin 1928.

B. L. van der Waerden, Mathematische Annalen 117 (1940) S. 141 bis 161.

K. von Fritz, Annals of Mathematics 46 (1945) S. 242—264.

---

die *anguli contactus* (zwischen einem Kreis z. B. und seiner Tangente) im Vergleich zu den von geraden Linien gebildeten Winkeln.