8. Die Mengenlehre

Zunächst kann es so scheinen, als sei mit dem Grenzprozeß das starre *Sein* endgültig ins *Werden* aufgelöst; als sei damit allein schon des *Aristoteles* Lehre mathematisch realisiert, daß das Unendliche nur *δυνάμει* (der Potenz nach), nur im Entstehen und Vergehen, nicht aber *ἐνεργείᾳ* existiere. Ein Irrtum! Die einzelne konvergente Folge, wie z. B. die Folge der Partialsummen der Leibnizschen Reihe

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots,$$

welche gegen $\pi/4$ konvergiert, entfaltet sich ja nicht in einem gesetzlosen Prozeß, dem wir uns blind überlassen müssen, um zu erfahren, was er von Stufe zu Stufe gebiert; sondern sie ist ein für allemal festgelegt durch ein bestimmtes *Gesetz*, das jeder natürlichen Zahl n den zugehörigen Näherungswert (die n-te Partialsumme) zuordnet. Eine Aufteilung der unendlich vielen rationalen Zahlen in die drei Klassen I, II, III des Dedekindschen Schnitts geschieht nicht so, daß man einen Bruch nach dem anderen vornimmt und ihn seiner Klasse zuweist, sondern gesetzmäßig, indem man angibt: alle rationalen Zahlen mit der und der Eigenschaft kommen in die Klasse I (es genügt, die Klasse I zu definieren, da durch sie die beiden anderen ohne weiteres mitbestimmt sind). Das *Gesetz* bzw. die *Eigenschaft* legt die intendierte reelle Zahl exakt fest. — Es heißt, eine Funktion $f(x)$ sei an der Stelle $x = a$ stetig, wenn $f(x)$ gegen $f(a)$ konvergiert, während die Veränderliche x gegen a strebt — wie aber wird dieser Begriff der Konvergenz erklärt?: „Zu *jedem* positiven ε *gebe es* eine positive Zahl δ von der Beschaffenheit, daß für *alle* reellen Zahlen x, welche der Bedingung $a - \delta < x < a + \delta$ genügen, auch die Ungleichung $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$ erfüllt ist." Unsere Auffassung bleibt also statisch; sie ist gekennzeichnet durch die schrankenlose Anwendung der Termini „es gibt" und „alle" nicht bloß auf die natürlichen Zahlen, sondern auch auf die Stellen im Kontinuum, d. h.

auf die möglichen Folgen oder Mengen natürlicher Zahlen. Hierin besteht das Wesen der Mengenlehre; nicht nur die Zahlenreihe, sondern auch die Gesamtheit ihrer Teilmengen betrachtet sie als einen geschlossenen Inbegriff an sich existierender Gegenstände. So steht sie ganz auf dem Boden des aktual Unendlichen. Dies einmal zugegeben, ist aber das gewaltige Bauwerk der Analysis von unerschütterlicher Festigkeit: sicher fundiert, in allen Teilen streng begründet, scharf in den Begriffen und lückenlos in den Beweisen. Sie hat dadurch Grundlagen gewonnen, welche die Einhelligkeit aller an ihr Arbeitenden unbedingt verbürgen.

Freilich bedurfte es eines bedeutenden mathematischen Scharfsinns, um die allgemeinsten Tatsachen über die Stetigkeit, welche der Anschauung am nächsten zu liegen scheinen, sicherzustellen: daß z. B. eine stetige Funktion alle Zwischenwerte annimmt, daß eine geschlossene doppelpunktlose Kurve in der Ebene die Ebene in zwei Gebiete teilt, oder daß man ein zweidimensionales Gebiet nicht auf ein dreidimensionales umkehrbar-eindeutig und stetig abbilden kann. Wir machen an unseren Studenten immer wieder die Erfahrung, wie langwieriger Schulung es bedarf, um die für das Verständnis dieser Beweise und ihrer Strenge erforderliche Voraussetzungslosigkeit sich zu erwerben. Neben solchen die Anschauung bestätigenden Sätzen deckt die Analysis andererseits viele Vorkommnisse auf, denen die Anschauung nicht zu folgen vermag: stetige Kurven, welche überall ohne Tangente sind oder ein ganzes Quadrat erfüllen u.dgl. mehr. Alle unbewiesenen Voraussetzungen auf der geschilderten Grundlage sicherzustellen, war das Werk des 19. Jahrhunderts von *Cauchy* und *Gauß* bis *Weierstraß*.

Nicht nur der Analysis, sondern auch der ersten Anfänge der Mathematik, der Lehre von den natürlichen Zahlen, hat sich die mengentheoretische Methode bemächtigt. Die Zahlenreihe ist ihr eine fertige Menge Z, innerhalb deren eine Abbildung $n \to n'$ definiert ist, welche jedem Element n der Menge in eindeutig bestimmter Weise ein Element n' zuordnet. Eben dadurch, daß so Z eineindeutig auf eine nicht mit Z identische Teilmenge von sich selber abgebildet erscheint (dasselbe leisten die Zuordnungen $n \to 2n$ oder $n \to n^2$), gibt sich Z als *unendliche Menge* zu erkennen. Der Endlichkeit einer Menge kann man erst versichert sein, wenn die Unmöglichkeit einer derartigen Abbildung nachgewiesen ist.

Für die Mengenlehre besteht also zwischen dem Endlichen und dem Unendlichen keine grundsätzliche Schranke; ja das Unendliche erscheint ihr sogar als das Einfachere (wie auch *Descartes* den Vorrang des Begriffs des Unendlichen vor dem Endlichen behauptet hat: Brief an *Clerselier*, Corr. V, S. 356, und Dritte Meditation, § 28). Daß in dem angegebenen bestimmten Sinne für das Unendliche *Euklids* Größenaxiom *καὶ τὸ ὅλον μέρους μεῖζον* (das Ganze ist größer als sein Teil) nicht gilt, bemerkt bereits *Galilei*, Discorsi (Opere, ed. Alberi, XIII, S. 36); *Leibniz* (Brief an *Bernoulli*, Math. Schriften, ed. Gerhardt, III, S. 536) schließt daraus, daß „die Anzahl oder Menge aller Zahlen einen Widerspruch einschließt, wenn man sie als ein einziges Ganzes nimmt". Für *Bolzano* (Paradoxien des Unendlichen, 1851, § 20) liegt hierin eine „Paradoxie des Unendlichen", *Dedekind* endlich (Was sind und was sollen die Zahlen? 1887) erhebt diesen Tatbestand zur Definition des Unendlichen.

Nennt man mit *Dedekind* eine Menge K natürlicher Zahlen eine *Kette*, wenn mit jeder in K als Element auftretenden Zahl x auch ihr „Bild" x' in K vorkommt, so drückt sich die Tatsache, daß man zu einer beliebig vorgegebenen Zahl dadurch gelangen kann, daß man mit 1 beginnt, zu dessen Bild $1' = 2$ übergeht, darauf durch abermaligen Vollzug der Abbildung zu $2' = 3$ gelangt, und so fort — diese logisch anscheinend nicht weiter zu reduzierende Vorstellung des „und so fort", die das Wesen der natürlichen Zahlenreihe ausmacht, drückt sich in folgendem Grundsatz aus: *Jede Kette, welche* 1 *als Element enthält, ist mit ganz Z identisch.* Die vollständige Induktion kann also auf die transfinite Verwendung der Begriffe „alle" und „es gibt" begründet werden; es fällt dadurch in der Mengenlehre die Scheidewand zwischen Mathematik und Logik. Die Untersuchungen von *Dedekind*, *Frege*, *Russell* gehen darauf hinaus, die Mathematik vollständig zu logisieren. — Fragt man, wann eine natürliche Zahl n kleiner ist als die vorgegebene Zahl m, so ersetzt die Mengenlehre das finite spezifisch arithmetische Kriterium („wenn die Durchzählung der Zahlen von 1 bis m, noch bevor m erreicht ist, über n führt") durch ein transfinites von rein logischem Charakter: „wenn es eine Kette gibt, welche m, aber nicht n enthält". Aber nur indem man diese Stufe der Anwendung von „es gibt" erklimmt, wo es auf die *Mengen* natürlicher Zahlen bezogen wird, ist etwas Derartiges möglich.

Und erst hierzu ist die *Vergegenständlichung der Mengen* und damit der Eigenschaften erforderlich, welche die gewöhnliche Umgangssprache seltsamerweise von Anfang an vollzogen hat. Eine Aussage wie etwa „Die Rose ist rot" wird nun nicht mehr dem Schema „x ist rot" mit der einen Leerstelle x untergeordnet, sondern dem allgemeineren „x hat die Eigenschaft X", aus welchem sie durch die Ausfüllung $x =$ Rose, $X =$ rot hervorgeht. Die Worte „hat die Eigenschaft" bezeichnen eine gewisse Relation ε, welche zwischen dem willkürlichen Gegenstand x und einer willkürlichen Eigenschaft X bestehen kann. Erst hier tritt die *Kopula* ε auf: sie wandelt das von Hause aus zweiteilige Urteil in ein dreiteiliges $x \varepsilon X$. (Die grotesken Verwechslungen der Kopula mit der Existenz und der Gleichheit sind eines der traurigsten Zeichen für die Abhängigkeit der philosophischen Spekulation von zufälligen Sprachformen.) Und nun ist die Bahn frei, auch auf die Leerstelle X formal die Definitionsprinzipien § 1, 6. und 7. anzuwenden. Die Einführung des allgemeinen Mengenbegriffs besteht somit aus zwei wesentlich verschiedenen Schritten: der erste ist die eben geschilderte Vergegenständlichung, der zweite die Übereinkunft, zwei Eigenschaften X, Y oder die korrespondierenden Mengen dann gleich zu setzen, wenn alle Elemente von X auch zu Y gehören und umgekehrt.

Aus einem Inbegriff einzelner aufgewiesener Gegenstände können wir durch Auswahl der Reihe nach alle möglichen Teilmengen herstellen und überblicken. Bei der unendlichen Menge Z ist aber der Existentialabsolutismus für die Teilmengen noch bedenklicher als für die Elemente. Da man nur solcher Teilmengen habhaft werden kann, die gesetzmäßig durch eine charakteristische Eigenschaft ihrer Elemente festgelegt sind, wird man schwer das Gefühl los, daß damit eine chaotische Fülle von Möglichkeiten, von willkürlich „zusammengewürfelten", „gesetzlosen" Mengen unter den Tisch fällt. Aber der antinomische Charakter des unfaßbaren „Inbegriffs aller möglichen Eigenschaften natürlicher Zahlen" läßt sich noch viel präziser darlegen. Es sei uns gelungen, irgendwie einen „*umfangsdefiniten*" Inbegriff solcher Eigenschaften, ich will sie Eigenschaften 1. Stufe nennen, abzustecken; so daß wir von der Frage „Gibt es eine Eigenschaft 1. Stufe von der und der genau geschilderten Art $\mathfrak{A}$ oder nicht?" stets glauben dürfen, sie fände Antwort in einem an sich bestehenden Sachverhalt. Alsdann können wir von der Eigenschaft $E_{\mathfrak{A}}$ reden, die einer Zahl x dann und nur dann zukommt, falls es überhaupt eine Eigenschaft 1. Stufe von der Art $\mathfrak{A}$ *gibt*, deren x teilhaftig ist. Aber diese Eigenschaft $E_{\mathfrak{A}}$ steht gewiß ihrem Sinne nach außerhalb des Kreises der Eigenschaften 1. Stufe, sie gehört einer höheren, der 2. Stufe von Eigenschaften an, weil sie erst auf Grund der Gesamtheit der Eigenschaften 1. Stufe definiert ist. *No totality can contain members defined in terms of itself (Russell)*. Ähnlich baut sich auf der 2. die 3. Stufe auf usf. Man müßte entsprechend Mengen natürlicher Zahlen und damit reelle Zahlen 1., 2., 3., ... Stufe unterscheiden. Die Konstruktionsweise der Eigenschaft $E_{\mathfrak{A}}$ tritt in der Analysis z. B. auf, wenn die obere Grenze einer Punktmenge auf der Geraden bestimmt wird. Die Verwischung dieser zuerst von *Russell* in seiner Typenlehre nachgewiesenen Stufenunterschiede durch den Existentialabsolutismus bedeutet einen unbestreitbaren *circulus vitiosus*.

Dem Dilemma würde man nur dann entgehen, wenn jede Eigenschaft 2. Stufe mit einer Eigenschaft 1. Stufe zwar nicht sinnesgleich, aber umfangsgleich wäre. Solange man die Reihe der natürlichen Zahlen für einen umfangsdefiniten Inbegriff gelten läßt, könnte man als Eigenschaften 1. Stufe z. B. diejenigen in Anspruch nehmen, welche mit Hilfe der in § 1 angeführten Definitionsprinzipien aus der einen Grundrelation „*n* folgt auf *m*" im Gebiete der natürlichen Zahlen entspringen. In diesem Falle wird unser Wunsch kaum erfüllt sein. Die Aufgabe wäre, die Konstruktionsprinzipien für die Eigenschaften 1. Stufe so zu erweitern, daß nachweislich jede Menge 2. Stufe mit einer der 1. zusammenfällt. Aber es ist nicht das leiseste Anzeichen dafür vorhanden, daß dies gelingen könnte. *Russell* läßt, um sich aus der Affäre zu ziehen, die Vernunft Harakiri begehen, indem er jenen der Einsicht sich völlig verschließenden Satz als *axiom of reducibility* postuliert. Ich selber habe in einer 1918 erschienenen Schrift „Das Kontinuum" ehrlich die Konsequenzen gezogen und ein Feld von reellen Zahlen 1. Stufe konstruiert, innerhalb dessen die wichtigsten Operationen der Analysis sich vollziehen lassen.

Trotz des antinomischen Charakters hat bisher die Idee der absoluten Existenz im Gebiete der natürlichen Zahlen und Zahl-mengen zu keinem Widerspruch geführt. *G. Cantor* aber streifte alle Fesseln ab, indem er völlig frei mit dem Mengenbegriff operierte, insbesondere zuließ, daß von jeder Menge wieder die Menge aller ihrer Teilmengen gebildet werden könne. Er entwickelte eine allgemeine Theorie der *Kardinalzahlen und Ordinalzahlen unendlicher Mengen.* Erst hier stieß man an den äußersten Grenzen der Mengenlehre auf wirkliche Widersprüche. Als ihre Wurzel vermag man aber nur die schon von Anfang an in der Mathematik begangene Kühnheit aufzudecken: daß ein Feld konstruktiver Möglichkeiten als geschlossener Inbegriff an sich seiender Gegenstände behandelt wurde. Vgl. darüber *Weyl,* Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik, Symposion I, S. 13.

Literatur

B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen. Leipzig 1851.

G. Cantor, Gesammelte Abhandlungen. Berlin 1932; bes. Abschn. III u. IV.

R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? 9. Aufl. Braunschweig 1961.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl. Berlin 1928.

G. Frege, Grundlagen der Arithmetik. Breslau 1884.

F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre. 3. Aufl. Berlin und Leipzig 1935.

B. Russell, Einführung in die mathematische Philosophie. 1923.

H. Weyl, Das Kontinuum. Berlin 1918.