

## 2. Zustandsverschränkungen: das Kennzeichen der Quantentheorie

### a) *Inkompatible Eigenschaften*

Die Quantentheorie ist eine Herausforderung an die philosophische Tradition, in der Einstein steht und die von Aristoteles bis heute reicht und die durch die vier genannten Prinzipien gekennzeichnet ist. Betrachten wir zunächst ein einzelnes Quantensystem und dessen Eigenschaften. Quantensysteme sind zum Beispiel Elektronen und Photonen, Protonen und Neutronen einschließlich ihrer Bestandteile (Quarks) ebenso wie ganze Atome. Die Eigenschaften von Quantensystemen werden „Observablen“ genannt. Man kann grundlegende, charakteristische Eigenschaften von Quantensystemen definieren. Zu den grundlegenden, zeitabhängigen Eigenschaften von Quantensystemen gehören der Ort und der Impuls ebenso wie der Spin in jeder Raumrichtung. Der Impuls ist das Produkt von Masse und Geschwindigkeit. Der Spin ist eine Art Eigendrehimpuls. Diese Eigenschaft wird nur in der Quantenphysik behandelt.

In der klassischen Physik sind alle fundamentalen Eigenschaften eines Systems in folgendem Sinne voneinander unabhängig: (1) Alle Eigenschaften

Heisenberg'sche  
Unbestimmtheits-  
relation

haben zu jedem Zeitpunkt einen definierten numerischen Wert. (2) Der Wert, den eine Eigenschaft zu einem gegebenen Zeitpunkt hat, legt den Werten, welche die anderen fundamentalen Eigenschaften zu diesem Zeitpunkt haben können, keinerlei Beschränkung auf. In der klassischen Physik ist zum Beispiel jeder Wert des Ortes mit jedem beliebigen Wert des Impulses kompatibel, und umgekehrt. (3) Es ist im Prinzip immer möglich, den Wert einer Eigenschaft zu messen, ohne dadurch die Werte anderer Eigenschaften zu verändern.

In der Quantenphysik können hingegen die fundamentalen Eigenschaften eines Systems in folgendem Sinne voneinander abhängig sein: Es gibt Werte dieser Eigenschaften, die miteinander unvereinbar sind. Deshalb spricht man von *inkompatiblen Eigenschaften*. Das bekannteste Beispiel sind der Ort und der Impuls. Es ist kein Zustand eines Quantensystems möglich, in dem sowohl der Ort als auch der Impuls einen definiten numerischen Wert haben (oder einen nahezu definiten numerischen Wert; ich übergehe die mathematischen Schwierigkeiten, die damit verbunden sind, dass Ort und Impuls nie exakt einen definiten numerischen Wert haben können). Ein definitiver numerischer Wert ist genau eine Zahl, wie zum Beispiel 1, 3,2 oder 0,576. Ort und Impuls sind in folgender Weise voneinander abhängig: Je mehr sich der Wert des Ortes einem definiten numerischen Wert annähert, desto größer ist die Unbestimmtheit des Wertes des Impulses und umgekehrt. Es gibt keinen Zustand, in dem das System sowohl in einem beliebig kleinen Gebiet des Raumes lokalisiert ist als auch einen beliebig definitiven Wert des Impulses hat. Das ist der Inhalt der berühmten „Heisenberg’scher Unbestimmtheitsrelation“, die man mathematisch so darstellen kann:

$$(V.1) \quad \Delta p \Delta q \geq \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$$

In dieser Formel steht  $p$  für den Impuls,  $q$  für den Ort,  $\Delta$  steht für die Abweichung von einem definiten numerischen Wert und  $h$  steht für das Planck’sche Wirkungsquantum. Diese Formel besagt: Es gibt keinen Zustand eines Quantensystems, in dem das Produkt der Unbestimmtheit des Impulses und des Ortes unter einen bestimmten Wert fällt. Unbestimmtheit meint dabei die Abweichung von einem definiten numerischen Wert. Statt mit genau einem numerischen Wert haben wir es mit einer Werteverteilung zu tun. Wenn man von „Unbestimmtheitsrelation“ spricht, dann muss man sich darüber im Klaren sein, dass keine Unbestimmtheit im Sinne von Impräzision gemeint ist. Die genannte Beziehung zeigt einen genauen untersten Wert für das Produkt der Unbestimmtheit von Ort und Impuls an. Diese Beziehung wird häufig auch „Heisenberg’sche Unschärferelation“ genannt. Dieser Ausdruck ist ebenfalls irreführend: Diese Beziehung betrifft keine Unsicherheit von Beobachtern in Bezug auf den Ort oder den Impuls des Systems. Unschärfe oder Unbestimmtheit ist etwas, das für diese Eigenschaften als solche selbst gilt und das sich präzise bestimmen lässt. In der Regel ist ein Quantensystem in einem Zustand, in dem es weder einen definiten numerischen Wert des Ortes noch einen definiten numerischen Wert des Impulses hat. Die wichtigste Konsequenz dieser wechselseitigen Abhängigkeit von Ort und Impuls innerhalb eines Quantensystems ist deshalb, dass *Quantensysteme in der Regel nicht lokalisiert sind*. Ihre Eigenschaften – auch ihre

zustandsunabhängigen Eigenschaften wie Masse und Ladung – bestehen nicht an Punkten oder beliebig kleinen Gebieten im Raum. Die Quantentheorie verletzt somit das Prinzip der Lokalisiertheit.

Ort und Impuls sind nicht das einzige Beispiel für inkompatible Eigenschaften. Vom Formalismus der Quantentheorie her ist zu erwarten, dass es für jede zeit- oder zustandsabhängige Eigenschaft eines Quantensystems andere Eigenschaften desselben Systems gibt, mit denen diese Eigenschaft inkompatibel ist. Eine gegebene Eigenschaft ist nicht mit allen anderen Eigenschaften desselben Systems inkompatibel; aber dennoch gibt es für jede zustandsabhängige Eigenschaft eines Quantensystems mindestens eine andere zustandsabhängige Eigenschaft desselben Systems, mit der diese Eigenschaft inkompatibel ist. Ein bekanntes Beispiel für inkompatible Eigenschaften neben Ort und Impuls ist der Spin in allen drei orthogonalen Raumrichtungen – der Spin in Richtung der  $x$ -Achse (Spin  $x$ ), der Spin in Richtung der  $y$ -Achse (Spin  $y$ ) und der Spin in Richtung der  $z$ -Achse (Spin  $z$ ). Wenn im Folgenden vom Spin ohne weitere Erläuterung die Rede ist, dann sind immer diese Spinkomponenten gemeint. Es ist kein Zustand eines Quantensystems möglich, in dem das System einen definiten numerischen Wert von mehr als einer dieser Eigenschaften hat.

Spin

Der Spin bietet sich für mathematische und experimentelle Untersuchungen an, da es Quantensysteme von Spin  $1/2$  gibt, wie zum Beispiel Elektronen. Für diese Systeme gibt es nur zwei mögliche definite numerische Werte des Spin in jeder Raumrichtung, nämlich „Spin plus“ und „Spin minus“. Spin  $1/2$  ist somit eine determinierbare Eigenschaft, deren determinierte Werte Spin plus und Spin minus sind. Nichtsdestoweniger ist ein Quantensystem normalerweise nicht in einem Zustand, in dem es einen definiten numerischen Wert des Spin in irgendeiner Raumrichtung hat. Die Weise, in der ein Quantensystem die determinierbare Eigenschaft Spin  $1/2$  hat, besteht normalerweise in einer Überlagerung (*Superposition*) dieser Werte. So kann ein Elektron zum Beispiel ohne Weiteres in einem Zustand sein, der eine Überlagerung der beiden möglichen Werte sagen wir des Spin  $z$  ist, also eine Überlagerung der Werte Spin plus und Spin minus in Richtung der  $z$ -Achse.

Superpositionsprinzip

Allgemein können wir die Situation in der Quantenphysik in folgender Weise zusammenfassen: Wenn in der klassischen Physik eine Eigenschaft verschiedene mögliche Werte haben kann (sagen wir, die Werte „plus“ und „minus“), dann ist das System immer in einem Zustand, in dem es genau einen dieser Werte besitzt und alle anderen Werte ausgeschlossen sind. In der Quantenphysik hingegen kann ein System ohne Weiteres in einem Zustand sein, der eine Überlagerung (Superposition) aller möglichen Werte der betreffenden Eigenschaft ist, also ein Zustand, in den alle diese Werte eingehen. Wenn zwei oder mehrere Eigenschaften eines Systems miteinander inkompatibel sind, dann kann das System nur in einem Zustand sein, in dem es einen definiten numerischen Wert von höchstens einer dieser Eigenschaften hat. Wenn zum Beispiel ein System von Spin  $1/2$  wie ein Elektron in einem Zustand ist, in dem es den Wert „Spin plus“ in der  $z$ -Richtung hat, dann ist in Bezug auf Spin  $x$  und Spin  $y$  dieser Zustand eine Überlagerung der Werte „Spin plus“ und „Spin minus“ – in diesem Falle eine Überlagerung, in die diese beiden Werte gleichgewichtig eingehen.

Messungen  
inkompatibler  
Eigenschaften

Das Überlagerungs- oder Superpositions-Prinzip hat weitreichende Konsequenzen. Wenn man eine zustandsabhängige Eigenschaft eines Quantensystems misst, dann registriert das Messgerät nicht den Wert einer Eigenschaft, den das Quantensystem unabhängig von seiner Interaktion mit dem Messgerät hat. Vielmehr erwirbt das Quantensystem einen definiten numerischen Wert der betreffenden Eigenschaft nur relativ dazu, dass das Messgerät die Eigenschaft erwirbt, einen solchen definiten numerischen Wert anzuzeigen. Man kann diesen Sachverhalt nicht auf eine Störung mikroskopischer Systeme durch makroskopische Messgeräte zurückführen (siehe [5–5]). Es handelt sich hierbei um eine Konsequenz des Superpositions-Prinzip und des Prinzips inkompatibler Eigenschaften, angewendet auf den Fall einer Messung solcher Eigenschaften. Wenn in der Interpretation der Quantentheorie von Messungen die Rede ist, dann sind immer ideale Messungen gemeint. Das sind Messungen, bei denen von allen Störeinflüssen, die bei faktischen Messungen auftreten, abgesehen wird; eine unmittelbare Wiederholung einer idealen Messung liefert per definitionem das gleiche Ergebnis.

Gemäß der standardmäßigen Darstellung der Quantentheorie verändert sich der Zustand eines Quantensystems in einer Messung derart, dass das System einen definiten numerischen Wert der gemessenen Eigenschaft erwirbt, und zwar infolge der Interaktion mit dem Messgerät. Ein Quantensystem erwirbt demnach einen definiten numerischen Wert des Ortes nur durch die Interaktion mit einem Messgerät. Man kann im Prinzip immer eine Ortsmessung eines Quantensystems durchführen, und das Ergebnis ist ein definitiver numerischer Wert des Ortes. Dieser Wert wird jedoch nur durch den Messprozess verursacht. Unabhängig von einer Messung befindet sich ein Quantensystem normalerweise in einem Zustand, in dem es keinen definiten numerischen Wert hat, weder für den Ort, noch für den Impuls, noch für den Spin in irgendeiner Raumrichtung.

Wahrscheinlichkeiten

Es ist nicht voraussagbar, welchen definiten numerischen Wert ein Quantensystem in einem gegebenen Zustand im Falle einer Messung einer zustandsabhängigen Eigenschaft annehmen wird. Es können nur Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Messergebnisse berechnet werden. Betrachten wir ein einfaches Beispiel, den Spin in zwei orthogonale Richtungen. Gegeben sei ein System mit Spin  $1/2$  wie zum Beispiel ein Elektron. Wenn wir den Spin in Richtung der  $z$ -Achse messen und als Ergebnis, sagen wir, Spin plus bekommen, dann können wir über das Ergebnis einer nachfolgenden Messung des Spin in Richtung der  $x$ -Achse nur dieses sagen: Das Ergebnis Spin plus und das Ergebnis Spin minus haben beide die Wahrscheinlichkeit  $0,5$ . Nehmen wir an, dass wir nun Spin  $x$  messen und als Ergebnis Spin minus bekommen. Wir können in diesem Fall nicht sagen, dass das System den Wert Spin minus in  $x$ -Richtung und den Spin-Wert Spin plus in  $z$ -Richtung hat. Denn das System hat nach der Messung von Spin  $x$  keinen definiten numerischen Wert von Spin  $z$  mehr. Das einzige, was wir auf der Ebene von Messungen sagen können, ist, dass für eine erneute Messung von Spin  $z$  die Ergebnisse Spin plus und Spin minus nun beide die Wahrscheinlichkeit  $0,5$  haben. Weil nur Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse der Messungen zustandsabhängiger Eigenschaften von Quantensystemen vorausgesagt werden können, ist die Quantentheorie die erste grundlegende physikalische

Theorie, die einen Indeterminismus und einen objektiven Zufall zuzulassen scheint: Welches im jeweiligen Fall das konkrete Messergebnis ist, scheint zufällig zu sein. Die Frage, wie Messergebnisse und die Wahrscheinlichkeiten für Messergebnisse in der Quantentheorie interpretiert werden sollen, ist jedoch Gegenstand einer Kontroverse, die wir in Kapitel V.6 behandeln werden.