4.3.3 Bells Theorem als Strategie-Spiel

Mit den einfachen statistischen Beziehungen für entfernte Messungen kann man nun zeigen, dass die Welt, in der diese Beziehungen gemessen werden, nicht-lokal sein muss. Man sieht der Statistik auf den ersten Blick nicht an, dass sie so bedeutsam ist, und der Bellsche Beweis, der diese weitreichenden Konsequenzen aus

[4] Vgl. Jammer 1974, 307, und seine Darstellung des Bellschen Beweises.

den Daten ableitet, ist ein Musterbeispiel für Schlichtheit und Eleganz in wissenschaftlicher Argumentationsführung.

Die Hauptaussage von Bells Beweis ist, dass die gemessene Statistik nicht erklärt werden kann, wenn es nur lokale Einflüsse gibt (und normale Hintergrundannahmen gelten). Mit anderen Worten, wenn man aufgrund der Relativitätstheorie annimmt, dass kausale Einstein-Lokalität gilt, d.h. Einflüsse mit Überlichtgeschwindigkeit ausgeschlossen sind, ergibt sich ein Widerspruch zu den empirischen Daten. Rein lokale Theorien können die Korrelationen nicht reproduzieren. Wenn man an den üblichen Hintergrundannahmen festhält (siehe Abschnitt 4.5), muss es also in einem gewissen Sinne nicht-lokale Einflüsse geben. In Abbildung 4.4 hatten wir die maximale Menge von kausalen Relationen gezeigt, die in der EPR/B-Situation unter der Annahme von Einstein-Lokalität auftreten können. Es ist das Ergebnis von Bells Theorem, dass solche Strukturen nicht die Korrelationen erklären können und also die Situation nicht adäquat repräsentieren.

Ein entscheidendes Charakteristikum von Bells Theorem ist, dass man dafür keine spezielle Theorie mit bestimmten Zustandsbeschreibungen oder einer bestimmten Dynamik annehmen muss. Es bleibt auf einer abstrakten allgemeinen Ebene, und sein Resultat ist, dass *alle* Theorien, die sich auf lokale Wirkungen beschränken, nicht richtig sein können. Dieses Ergebnis gilt selbst dann, wenn man zulässt, dass ein Photon an der Quelle beliebig viel Information über das jeweils andere Photon tragen kann. Diese Annahme erlaubt es, über die quantenmechanische Zustandsbeschreibung hinauszugehen und den Zustand der Photonen durch eine sogenannte verborgene Variable genauer zu spezifizieren. Von Kritikern der Quantenmechanik wurde immer wieder die Hoffnung geäußert, dass es verborgene Variablen geben könnte, die die Beschreibung der Quantenobjekte durch den quantenmechanischen Zustand präzisieren und die Quantenwelt schließlich doch als deterministisch und lokal erweisen. Bell wollte dieser Möglichkeit Raum geben und nahm an, dass der Zustand der Photonen an der Quelle neben dem Quantenzustand auch durch eine weitere empirisch nicht zugängliche Variable λ beschrieben wird. Wie der quantenmechanische Zustand an der Quelle, ψ, kann sie aufgrund der Einstein-Lokalität in der kausalen Struktur nur die Rolle einer gemeinsamen Ursache der Messergebnisse spielen. Das erweiterte kausale Diagramm mit der latenten gemeinsamen Ursache λ haben wir in Abbildung 4.5 abgedruckt (wir verzichten hier und im Folgenden auf die Einzeichnung der Lichtkegel). Auch diese stärkere lokale Struktur (mit *zwei* gemeinsamen Ursachen) kann nach Bells Theorem die Korrelationen nicht erklären.

Bevor wir eine wissenschaftsphilosophisch klare Analyse von Bells Beweisgang präsentieren, wollen wir in diesem Abschnitt zunächst das Argument in einer intuitiven Form darlegen. T. Maudlin (2011, Kap. 1) hat eine tiefgehende und erhellende Analogie für das Bellsche Argument gefunden. Er vergleicht die Situation der Photonen in EPR/B-Experimenten, die nach Verlassen der gemeinsamen Quelle nicht mehr interagieren können (weil sie ab da raumartig getrennt sind), mit der

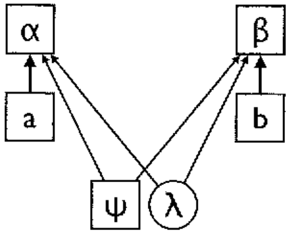

Abb. 4.5: Lokale kausale Struktur mit verborgener Variable λ

Situation, dass zwei Personen sich zunächst in einem Raum befinden und dann in verschiedene Räume getrennt werden. Solange sie sich gemeinsam in einem Raum befinden, dürfen sie nach Belieben Absprachen treffen. (Dies entspricht der Tatsache, dass die Photonen durch ihre gemeinsame Anwesenheit an der Quelle beliebige Informationen über einander besitzen können.) Nach ihrer Trennung in verschiedene Räume können die Personen nicht mehr miteinander kommunizieren. (Das reflektiert den Aufbau, bei dem die Photonen sich mit Lichtgeschwindigkeit voneinander wegbewegen und deshalb nicht mehr miteinander interagieren können.) In den einzelnen Räumen wird jeder der Personen dann zufällig eine von drei Fragen gestellt, die sie mit „ja" oder „nein" beantworten muss. (Die Fragen entsprechen den Messrichtungen der Messapparate, auf die die Photonen treffen, die Antworten dem Verhalten der Photonen, das eines von zwei möglichen Messergebnissen erzeugt.) Zum Beispiel erhält eine der Personen die Frage „30°?" und antwortet mit „nein", während die andere die Frage „0°?" gestellt bekommt und mit „ja" antwortet. Diese Prozedur und Befragung wird viele Male mit jeweils anderen Personenpaaren wiederholt. Es ergibt sich eine Ergebnistabelle von einer Form, die analog zum Laborprotokoll aus EPR/B-Experimenten ist (vgl. Tabelle 4.1; einziger formaler Unterschied: „ja" statt „+" und „nein" statt „−"). Das Ziel der Personen soll es sein, auf die Fragen so zu antworten, dass die Befragungsergebnisse auch die *gleiche Statistik* wie die Messungen an Photonen in EPR/B-Experimenten haben. Das heißt, immer wenn die Personen die gleiche Frage erhalten, müssen ihre Antworten übereinstimmen, und wenn sich die Fragen um 30° unterscheiden, müssen die Antworten in 75% der Fälle übereinstimmen, und bei einer Differenz um 60° in 25% der Fälle. Kann diese Aufgabe gelingen?

Die Schwierigkeit besteht darin, dass die Personen, während sie antworten, weder die Frage kennen, die der anderen Person gestellt wird, noch deren Antwort. Das heißt, wenn sie überhaupt irgendeine Chance haben wollen, die Statistik zu reproduzieren, müssen sie eine Strategie (das entspricht einer verborgenen Variablen bei den Photonen) vereinbaren, gemäß der sie die Fragen beantworten, *bevor* sie den gemeinsamen Raum verlassen. Welche Strategie ist erfolgversprechend?

Um die erste statistische Forderung zu erfüllen, bei gleichen Fragen mit Sicherheit gleiche Antworten zu geben, müssen sie auf jeden Fall vorher vereinbaren, mit welcher Antwort beide auf jede der drei möglichen Fragen reagieren. Für jedes Paar von Probanden gibt es demnach acht mögliche Strategien, von denen jede eine eindeutige Antwort auf jede Frage festlegt (Tabelle 4.2).

Strategie	Antwort auf „0°?"	Antwort auf „30°?"	Antwort auf „60°?"
1	ja	ja	ja
2	ja	ja	nein
3	ja	nein	ja
4	nein	ja	ja
5	ja	nein	nein
6	nein	ja	nein
7	nein	nein	ja
8	nein	nein	nein

Tab. 4.2: Mögliche Strategien für perfekte Korrelationen

Wenn jedes Paar von Personen eine dieser Strategien wählt, ist gesichert, dass sich bei gleichen Fragen perfekte Korrelationen ergeben. Da die Antworten auf gleiche Fragen zwischen verschiedenen Durchgängen in der Statistik variieren, ist außerdem klar, dass verschiedene Paare verschiedene Strategien wählen müssen. Dies müsste so geschickt geschehen, dass sich die beiden anderen Korrelationen für verschiedene Fragen ergeben. In welchem Verhältnis müssen die Personen die Strategien mischen, damit sich die Statistik ergibt?

Wir werden nun zeigen, dass es keine Mischung geben kann, der dies gelingt. Dazu betrachten wir die möglichen Mischungen ganz allgemein, d.h. ohne besondere Annahmen, und bezeichnen den Anteil der Fälle, in denen die Personen Strategie 1 wählen, mit f_1, den Anteil der Fälle, in denen sie Strategie 2 wählen, mit f_2 usw. Aus diesen Gewichten kann man dann aus der Tabelle 4.2 die resultierende Statistik ableiten. Zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit, dass Person A mit „ja" und Person B mit „nein" antwortet, wenn A die Frage „0°?" und B die Frage „60°?" gestellt wird, gleich $f_2 + f_5$. Hierzu haben wir einfach die Gewichte aller Strategien summiert, die diese Antworten für die entsprechenden Fragen ergeben. Wir notieren diese Tatsache in der üblichen Kurzschreibweise als $P(\alpha = +, \beta = -|a = 0^\circ, b = 60^\circ) = f_2 + f_5$. Die Wahrscheinlichkeit für die gleichen Antworten bei den Fragen „0°?" und „30°?" bzw. bei den Fragen „30°?" und „60°?" ergibt sich aus Tabelle 4.2 als $P(\alpha = +, \beta = -|a = 0^\circ, b = 30^\circ) = f_3 + f_5$ bzw. als $P(\alpha = +, \beta = -|a = 30^\circ, b = 60^\circ) = f_2 + f_6$. Da die Gewichte alle positiv oder 0 sind, ist es einfach, zu sehen, dass diese drei Wahrscheinlichkeiten einer Ungleichung gehorchen müssen:

$$f_2 + f_5 \leq f_3 + f_5 + f_2 + f_6 \tag{4.16}$$

$$P(\alpha = +, \beta = -|a = 0°, b = 60°) \leq P(\alpha = +, \beta = -|a = 0°, b = 30°) + \\ + P(\alpha = +, \beta = -|a = 30°, b = 60°) \tag{4.17}$$

Diese letztere Ungleichung ist eine der sogenannten Wigner-Bell-Ungleichungen, ein Untertyp der Klasse der Bellschen Ungleichungen. Der entscheidende Punkt des Arguments ist nun, dass diese Ungleichung, die aus der Annahme der Strategien und ihrer Gewichtungen folgte, der gemessenen Statistik widerspricht. Die Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite hat nach der gemessenen Statistik den Wert 37,5% (sie entspricht der Hälfte des 75%-Anteils der Messergebnisse, die bei einer Winkeldifferenz von 60° nicht übereinstimmen; die andere Hälfte kommt den Fällen zu, in denen A mit „nein“ antwortet und B mit „ja“); die Wahrscheinlichkeiten auf der rechten Seite haben je 12,5% (je die Hälfte des Nicht-Übereinstimmungsanteils von 25%). Das ergibt $37,5\% \leq 12,5\% + 12,5\%$, und das ist ein offensichtlicher Widerspruch: *Die empirische Statistik verletzt die Bellsche Ungleichung.*

Da wir keine speziellen Annahmen über die Gewichte gemacht haben, bedeutet der Widerspruch, dass keine irgendwie geartete Verteilung der Gewichte eine Strategie ergibt, die die gemessene Statistik reproduzieren kann. Die Idee, dass Personen durch vorherige Absprache eine Antwort-Strategie festlegen können, die die Statistik erzeugt, ist als unmöglich erwiesen worden. Wenn die beiden Personen wie beschrieben bei Absprache der Strategie die Frage noch nicht kennen und nach Kenntnis der Frage nicht mehr kommunizieren können, ist es für sie unmöglich, die Antworten auf die speziell korrelierte Weise zu geben, wie sie in EPR/B-Experimenten stattfindet.

Dieses Ergebnis kann man nun fast unverändert auf die Situation der Photonen übertragen: Wenn die Photonen die Messeinstellung nicht schon an der Quelle „kennen“ und nach Verlassen der Quelle nicht mehr „kommunizieren“ können, dann ist es unmöglich, dass sie die genannte Statistik erzeugen. Wir können aber messen, dass sie die Statistik erzeugen! Also muss eine der getroffenen Annahmen falsch sein. Höchstwahrscheinlich ist es so, dass sie nach Verlassen der Quelle doch noch miteinander „kommunizieren“, obwohl sie so zueinander gelegen sind, dass eine solche Beeinflussung nur schneller als mit Lichtgeschwindigkeit stattfinden könnte. Beeinflussungen, die schneller als mit Lichtgeschwindigkeit geschehen, heißen im Kontext der Relativitätstheorie „nicht-lokal“ und sind nach der üblichen Interpretation der Theorie verboten. Inwiefern dieser nicht-lokale Zusammenhang zwischen verschränkten Objekten mit der Relativitätstheorie vereinbar ist, d.h. ob man sich verschränkte Objekte in eine relativistische Raumzeit eingebettet vorstellen kann, ist das zentrale Problem verschränkter Systeme. Wir werden es in Abschnitt 4.4 diskutieren.

Zuvor wollen wir im nächsten Abschnitt die hier präsentierte intuitive Darstellung von Bells Theorem in eine wissenschaftsphilosophisch saubere Form bringen. Dies bedeutet zum einen, die anthropomorphe Sprechweise über „Strategien“, „Kommunikation“ und „Wissen“ zu eliminieren – alles Beschreibungsweisen, die auf Photonen nicht zutreffen. Stattdessen werden wir Begriffe wie „probabilistische Abhängigkeit“, „kausale Beeinflussung“ und „verborgene gemeinsame Ursachen“ einführen. Zum anderen wollen wir die impliziten Annahmen der beschriebenen Situation transparent machen, um einen Überblick zu erhalten, was genau auf dem Spiel steht und welche Reaktionsmöglichkeiten auf Bells Theorem es eigentlich gibt.